Universität Ulm

Abgabe:

10.06.10, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 10

12 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 7

15. Entscheide, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind (mit Beweis).

(a) c_{00} ist ein dichter Teilraum von l^2. (2)

(b) c_{00} versehen mit der Supremumsnorm $\|(x_n)\| := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Banachraum. (2)

Lösung:

(a) Die Aussage ist wahr. Sei $x = (x_n) \in l^2$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 < \varepsilon.$$

Betrachte die Folge $y = (y_n)$ mit $y_n = x_n$ für $n \leq N$ und $y_n = 0$ für $n > N$. Dann ist $y \in c_{00}$ und

$$\|x - y\|_2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 < \varepsilon.$$

(b) Die Aussage ist falsch. Da c_{00} offenbar ein Teilraum von c_0 ist, ist c_{00} genau dann vollständig, wenn c_{00} abgeschlossen in c_0 ist. Um zu sehen, dass dies nicht der Fall ist, konstruieren wir eine in c_0 konvergente Folge, deren Grenzwert nicht in c_{00} liegt.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x^{(n)} \in c_{00}$ gegeben durch $x_k^{(n)} = \frac{1}{k}$ für $k \leq n$ und $x_k^{(n)} = 0$ für $k > n$. Dann konvergiert $x^{(n)}$ gegen $x = (\frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$, denn für $\varepsilon > 0$ ist

$$\|x - x^{(n)}\| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

für alle $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Offenbar ist $x \notin c_{00}$.

16. Es sei E ein normierter Vektorraum und $M \subset E$. Mit $\operatorname{co} M$ bezeichnen wir die konvexe Hülle von M, d.h. $\operatorname{co} M$ ist der Durchschnitt aller konvexen Obermengen von M. Fener sei

$$C := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \ : \ \lambda_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \ x_j \in M, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Beweise folgende Aussagen.

(a) $\operatorname{co} M$ ist konvex. (1)

(b) $C \subset \operatorname{co} M$. (2)

(c) $\operatorname{co} M = C$. (2)

(d) Ist M eine endliche Menge, so ist $\operatorname{co} M$ kompakt. (2)

(e) Der Abschluss einer konvexen Menge ist konvex. (1)

Lösung:

(a) Es seien $x, y \in \operatorname{co} M$, d.h. jede konvexe Obermenge von M enthält x und y. Für jedes $0 \leq \lambda \leq 1$ ist dann auch $\lambda x + (1-\lambda)y$ in jeder konvexen Obermenge von M enthalten und somit

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \operatorname{co} M \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

(b) Es sei D eine konvexe Obermenge von M. Für müssen zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 1$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ und $x_1, \ldots, x_n \in M$ gilt, dass $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \in D$. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Die Aussage gelte nun für ein $n \in \mathbb{N}$. Es seien $0 \leq \lambda_j \leq 1$ mit $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$ sowie $x_1, \ldots, x_{n+1} \in M$. Falls $\lambda_{n+1} \in \{0, 1\}$, so ist nichts zu zeigen. Sonst setzte $\mu_j = \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{n+1}}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist $0 \leq \mu_j \leq 1$ und $\sum_{j=1}^n \mu_j = 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $\sum_{j=1}^n \mu_j x_j \in D$. Da D konvex ist, erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j = \lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \in D.$$

(c) Nach Aufgabenteil (b) ist nur zu zeigen, dass C konvex ist. Seien dazu $x, y \in C$ und $0 \leq \lambda \leq 1$. Es gibt also $0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+m} \leq 1$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ und $\sum_{j=n+1}^{n+m} \lambda_j = 1$ sowie $x_1, \ldots, x_{n+m} \in M$, sodass

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \quad \text{und} \quad y = \sum_{j=n+1}^{n+m} \lambda_j x_j.$$

Also ist

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \sum_{j=1}^{n+m} \mu_j x_j$$

mit $\mu_j = \lambda\lambda_j$ für $1 \leq j \leq n$ und $\mu_j = (1-\lambda)\lambda_j$ für $n+1 \leq j \leq n+m$. Da $0 \leq \mu_j \leq 1$ für alle $1 \leq j \leq n+m$ und $\sum_{j=1}^{n+m} \mu_j = 1$, folgt aus der Definition von C, dass $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

(d) Sei $M = \{x_1, \ldots, x_N\}$ und $(y_n) \subset \operatorname{co} M$. Wir zeigen, dass diese Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert wieder in $\operatorname{co} M$ liegt. Nach Teil (c) gibt es Koeffizienten $0 \leq \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_N^{(n)} \leq 1$ mit $\sum_{j=1}^N \lambda_j^{(n)} = 1$ und $y_n = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(n)} x_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\lambda^{(n)} = (\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_N^{(n)})$ ist also eine Folge in dem kompakten Raum $[0,1]^N$. Wir wählen eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, die wir wieder mit $(\lambda^{(n)})$ bezeichnen. Es gilt also $\lambda_j^{(n)} \to \lambda_j$ für $n \to \infty$ und jedes $j \in \{1, \ldots, N\}$. Dann ist $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$ und

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{(n)} x_j \to \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j \in \operatorname{co} M$$

wegen Stetigkeit der Summe.

(e) Es sei $D \subset E$ eine konvexe Menge, oBdA $D \neq \emptyset$, $x, y \in \overline{D}$ und $0 \leq \lambda \leq 1$. Wähle Folgen $(x_n), (y_n) \subset D$ mit $\lim x_n = x$ und $\lim y_n = y$. Wegen

$$\lambda x + (1-\lambda)z \leftarrow \lambda x_n (1-\lambda)z \in D \quad (z \in D)$$

ist $\lambda x + (1-\lambda)z \in \overline{D}$ für alle $z \in D$. Also ist auch

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lim \lambda x + (1-\lambda)y_n \in \overline{D}.$$