Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 11

Übungen zur Harmonischen Analyse

Blatt 1

1. Es sei

$$L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ messbar } : f(t+2\pi) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Dies ist ein Banachraum bzgl. der Norm

$$\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Zu f, $g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ definieren wir die Faltung

$$(f \star g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) g(s) \, \mathrm{d}s.$$

(a) Es seien f, $g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und f, $g \geq 0$. Zeige, dass $f \star g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit

$$\|f \star g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

(b) Es seien f, $g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Dann ist $f \star g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ mit

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

(c) Zeige, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|D_n\|_1 = \infty$, wobei D_n den Dirichletkern bezeichnet.

(d) Aus Aufgabenteil (b) folgt, dass für jedes $g \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ der durch $f \mapsto f \star g$ definierte Operator $T_g \in \mathscr{L}(L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ die Abschätzung $\|T_g\| \leq \|g\|_1$ erfüllt. Es gilt sogar $\|T_g\| = \|g\|_1$ (ohne Beweis). Zeige: Es gibt ein $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, sodass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|D_n \star f\|_1 = \infty.$$

(e) Schließe aus dem vorherigen Aufgabenteil, dass es ein $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ gibt, dessen Fourierreihe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in $L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ konvergiert.