Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 11

Übungen zur Harmonischen Analyse

Blatt 3

5. Es sei X ein separabler Banachraum und E homogen bzgl. $L^1_{2\pi}(X)$. Ferner sei $\mathcal{T} \subset L^1_{2\pi}(X)$ der Raum der trigonometrischen Polynome und $m = (m_k) \subset \mathbb{C}$ eine komplexe Folge. Zeige:

(a) Der zu m gehörige Operator T_m lässt den Raum $\mathcal{T} \cap E$ invariant.

(b) Wenn es ein $c \geq 0$ gibt, sodass $\|T_m f\|_E \leq c\|f\|_E$ für alle $f \in \mathcal{T} \cap E$, dann ist m ein E-Multiplikator.

(c) Ist $m \in l^1(\mathbb{Z})$, so ist m ein E-Multiplikator.

(d) Ist $\mathcal{T} \subset E$ und m ein E-Multiplikator, so ist $m \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

6. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet. Zeige:

(a) Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so sind die Funktionen $(x, y) \mapsto \mathrm{Re} f(x + iy)$ und $(x, y) \mapsto \mathrm{Im} f(x + iy)$ harmonisch auf Ω.

(b) Ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, so gibt es eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $u(x, y) = \mathrm{Re} f(x + iy)$ auf Ω.