Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 11

Übungen zur Harmonischen Analyse

Blatt 4

7. Untersuche welche der folgenden Funktionen $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ in $L^{1w}(-\pi, \pi)$ und welche in $L^1(-\pi, \pi)$ liegt. Bestimme ggf. den Wert $\|f\|_{L^{1w}}$.

(a) $f(t) := \frac{1}{t}$

(b) $f(t) := \frac{1}{t^2}$

(c) $f(t) := \frac{1}{\sin(t)}$

8. Zeige oder widerlege folgende Behauptungen.

(a) Für $f \in L^1(-\pi, \pi)$ ist $\|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^{1w}}$.

(b) Die Menge $L^{1w}(-\pi, \pi)$ ist ein Vektorraum.

(c) Die Abbildung $f \mapsto \|f\|_{L^{1w}}$ definiert eine Norm auf $L^{1w}(-\pi, \pi)$.

9. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, X ein separabler Banachraum und $1 \le q < p < r \le \infty$. Zeige, dass

$$L^q(\Omega; X) \cap L^r(\Omega; X) \subset L^p(\Omega; X).$$

10. In dieser Aufgabe diskutieren wir verschiedene Messbarkeitsbegriffe. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und X ein separabler Banachraum. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt

1. *einfach*, falls sie von der Form $f = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} x_k$ ist, wobei $x_k \in X$ und $A_k \in \Sigma$.
2. *schwach messbar*, falls $\omega \mapsto \langle x', f(\omega)\rangle$ für jedes $x' \in X'$ messbar ist.
3. *stark messbar*, falls es eine Folge einfacher Funktionen $f_n : \Omega \to X$ gibt, sodass $f(\omega) = \lim f_n(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

Zeige zunächst, dass jede stark messbare Funktion $f : \Omega \to X$ auch schwach messbar ist.

Sei nun $f : \Omega \to X$ schwach messbar. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Es gibt eine Folge $(x'_n) \subset X'$ mit $\|x'_n\| = 1$ und $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle x'_n, x\rangle|$ für alle $x \in X$. Folgere, dass die Funktion $\omega \mapsto \|f(\omega) - x\|$ für jedes $x \in X$ messbar ist.

(b) Die Funktion f ist stark messbar.