Bedingter Erwartungswert

Maßtheorie Seminar

Dennis Eichhorn | 29.06.2012

Einleitung

Der bedingte Erwartungswert

$$X \in L^1(\Omega, F, P)\, ist\ eine\ Zufallsvariable,\ B \subseteq F\ E|X| < \infty$$

$$1.\ Y\ B - messbar$$

$$2.\ \int_A YP(d\omega) = \int_A XP(d\omega)\ \forall\ A \in B$$

Ein Y welches 1. und 2. erfüllt heißt bedingte Erwartung:

$$Y := E(X|B)$$

Ist Y definiert auf L^1?

Beweis der Existenz

Aufsplitten von X:

$$\nu(A) := \int_A X\, P(d\omega) \text{ oder } \int_A X^{+} P(d\omega) - \int_A X^{-} P(d\omega)$$

$$\mathit{Mit}\ P(A)=0 \;\Rightarrow\; \nu(A)=0 \;\Rightarrow\; \nu(A)\ \mathit{absolut\ stetig.}$$

$$\mathit{Mit\ Radon\ Nikodym\ folgt\ die\ Existenz\ einer\ Dichte}\ f:$$

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

Beweis der Eindeutigkeit

$$Sei\ A=\{Y_1>Y_2\}$$

$$\begin{aligned}\int_A Y_1-Y_2\,P(d\omega)&=\int_A Y_1\,P(d\omega)-\int_A Y_2\,P(d\omega)\\&=\int_A X\,P(d\omega)-\int_A X\,P(d\omega)\\&=0\end{aligned}$$

$$Also\ Y_1=Y_2\quad f.s.$$

Allgemeines Beispiel

$$B=\sigma(A_1,\dots,A_n),\quad A_1,\dots,A_n\in F \quad und \quad \Omega=\cup A_i \quad i=1,\dots,n \; A_i\, disjunkt$$

$$\Rightarrow E(X|B)=\sum_{i=1}^{n} E(X I_{A_i})/P(A_i)\cdot I_{A_i}$$

Wie kommt man auf diese Darstellung?

Darstellung

$(\Omega, F)\ Messraum$

$\mathbb{R}\ ist\ ein\ Banach-Raum$

$\Omega = \cup A_i \quad i = 1 \ldots n$

$X\ messbar$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot I_{A_i}$$

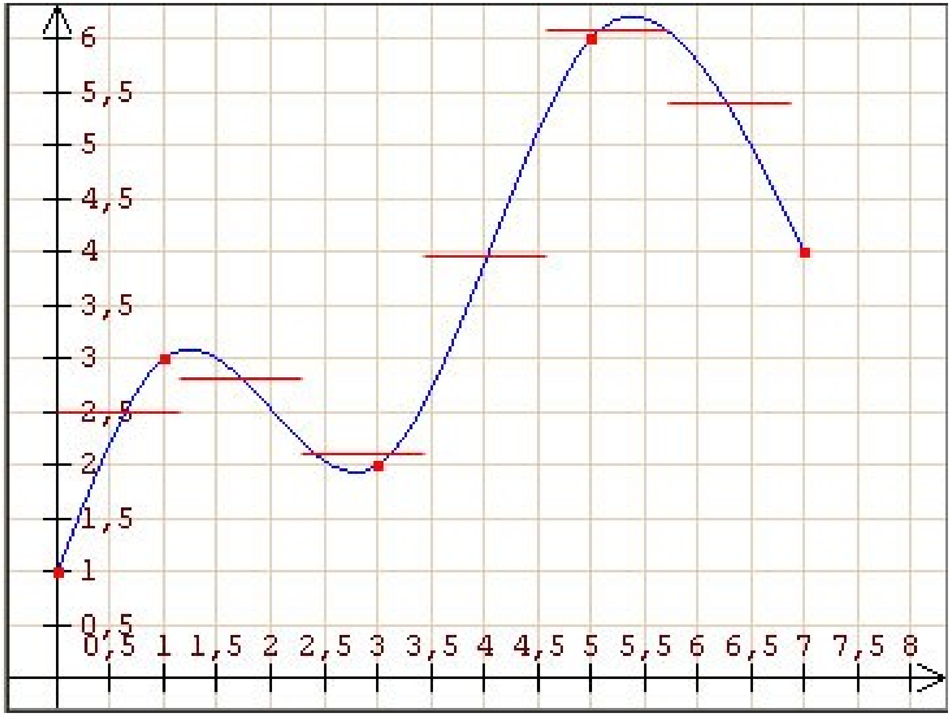
Bestimmen von k

$$\int_A E(X \mid B) P(d\omega) = \int_{A_j} \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot I_{A_i} P(d\omega) = k_j P(A_j)$$

$$= \int_{A_j} X P(d\omega) = E(X I_{A_j})$$

$$\Rightarrow k_j = E(X I_{A_j}) / P(A_j)$$

Grafik



Beispiel

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$X = Augenzahl\ beim\ Würfeln$$

$$A = Augenzahl\ ist\ gerade$$

$$E(\{2,4,6\}) = 2/3 + 4/3 + 6/3 = 4 = E(X \mid A)$$

Eigenschaften

$$X_{1,} X_2 \in L^1(\Omega, F, P) \quad a \in \mathbb{R}:$$

$$E(a X_1 + X_2 | B) = aE(X_1 | B) + E(X_2 | B)$$

Beweisidee

$$\int_A aX_1 + X_2 P(d\omega) = \ldots = \int_A aY_1 + Y_2 P(d\omega)$$

Eigenschaften

$$X, X_n \in L^1(\Omega, F, P) \quad X_n \geq 0 \quad X_n \to X$$

$$\Rightarrow E(X_n | B) \to E(X | B)$$

Beweisidee

$$Definiere\ Y_n := X - X_n \quad mit \quad X_n \to X \text{ in } L^1$$

$$\Rightarrow \int_A \lim_{n\to\infty} E(Y_n | B) P(d\omega) = \int_A \lim_{n\to\infty} Y_n P(d\omega) = 0$$

$$= \int_A \lim_{n\to\infty} X - X_n P(d\omega) = \int_A \lim_{n\to\infty} [E(X|B) - E(X_n|B)] P(d\omega)$$

$$\Rightarrow E(X|B) - \lim_{n\to\infty} E(X_n|B) = 0$$

Eigenschaften

$$X_{1,}\, X_2 \in L^1(\Omega, F, P) \quad X\ B-messbar$$

$$E(X_1 X_2 | B) = X_1 E(X_2 | B)$$

Beweisidee

Fallunterscheidung

1) $X_1 = I_C \quad C \in B$
2) $X_1\, ist\ einfach$
3) $X_1, X_2 \geq 0$
4) $X_1 = X_1^+ - X_1^- \quad und \quad X_2 = X_2^+ - X_2^-$

Fullunterscheidung 1

$$X_1 = I_C$$

$$\int_A X_1 X_2 P(d\omega) = \int_{A \cap C} X_2 P(d\omega) = \int_{A \cap C} E(X_2 | B) P(d\omega)$$

Fullunterscheidung 3

$X_1, X_2 \geq 0$ $\Rightarrow X_n \geq 0 \quad X_n \to X$

$$E(X_1 X_2 | B) = E\left(\lim_{n \to \infty} X_n X_2 | B\right) = \lim_{n \to \infty} X_n E(X_2 | B)$$

Bedingte Erwartung als orthogonale Projektion

Projektionssatz

$$F \subseteq L^2 \, abgeschlossen \Rightarrow \forall\, X \in L^2 \, \exists_1 \, Y \in F$$

$$|X - Y|_{L^2} = inf \, \{ |X - \Phi|_{L^2} \;\; \Phi \in F \}$$

$$\Leftrightarrow X - Y \perp \Phi \;\; \Phi \in F$$

Beweis der Existenz

$$Definiere \;\; d := inf \, |X - \Phi|_{L^2}$$

$$F \, abgeschlossen \;\; => \exists \Phi_n \lim_{n \to \infty} |X - \Phi_n|_{L^2} = d$$

$$Y := \lim_{n \to \infty} \Phi_n$$

Existiert der Grenzwert?

Existenz des Grenzwertes

$$|2\mathrm{X}-\Phi_k-\Phi_l|_{L^2}^2+|\Phi_k-\Phi_l|_{L^2}^2=2|X-\Phi_k|_{L^2}^2+2|X-\Phi_l|_{L^2}^2$$

$$\boxed{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)}$$

$$\Rightarrow 4\mathrm{d}^2+\lim_{k,l\to\infty}\sup|\Phi_k-\Phi_l|\leq 4\mathrm{d}^2$$

Eindeutigkeit

Äquivalenz

$$|X-Y|_{L^2} = inf\,\{|X-\Phi|_{L^2}\ \ \Phi \in F\}$$

$$\Leftrightarrow X-Y \perp \Phi\ \ \Phi \in F$$

Beweisidee

$$|X-Y|_{L^2}^2 = d \leq |X-(Y-t\Phi)|_{L^2}^2$$

$$\Leftrightarrow |X-Y|_{L^2}^2 \leq |X-Y|_{L^2}^2 + t^2|\Phi|_{L^2}^2 + 2\mathrm{t} < X-Y, \Phi >$$

$$\Leftrightarrow 0 = < X-Y, \Phi >$$

$$\Rightarrow L^2 = F + F^{\cdot\perp\cdot}\ \ (direkte\,Summe)$$

Weiterer Einstieg in die bedingte Erwartung

Die orthogonale Projektion

$$Q : L^2(\Omega, \Sigma, P) \rightarrow L^2(\Omega, F, P)$$

wird als bedingte Erwartung bzgl. F bezeichnet

Eigenschaften

$$f \leq g \Rightarrow Qf \leq Qg$$

Beweisidee

$$0 \leq g - f \Rightarrow 0 \leq Q(g - f) = Q(g) - Q(f)$$

$$Gilt \quad f \geq 0 \Rightarrow Qf \geq 0\,?$$

$$|f - f_1|_{L^2}^2 = \int_{f_1 > 0} |f - f_1|^2 P(d\omega) + \int_{f_1 \leq 0} |f - f_1|^2 P(d\omega) \geq |f - f_1^+|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow f_1 \geq 0$$

Eigenschaften

$$Q_1(Q_2 f) = Qf \quad Q_1\, bzgl.\ B_1,\ Q_2\, bzgl.\ B_2 \quad B_1 \subseteq B_2$$

Beweisidee

$$Q_1(Q_2 f) = < Q_1(Q_2 f), g > = < f, Q_2(Q_1 g) > = < f, Q_1 g >$$

Bezug zu L^1

Ausblick

Bedingte Varianz:

$$Var(X|Y) := E((X - E(X|Y))^2 | Y)$$

und

$$Var(X|B) := E(X^2|B) - E(X|B)^2$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) := E(I_A|B) \quad A \in F$$

und

$$P(A|Y) := E(I_A|Y) \quad A \in F$$