

DAS BANACH TARSKI PARADOXON

MARCEL KREUTER

1. DAS MASS- UND DAS INHALTSPROBLEM

In seiner Doktorarbeit stellte Henri Léon Lebesgue 1902 die Frage, ob es eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ gibt, die folgenden Eigenschaften genügt

(i) für alle $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \text{ falls } A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

(ii) für alle $A, B \subset \mathbb{R}^d$ mit $A \cong B$ gilt $\mu(A) = \mu(B)$ (Bewegungsinvarianz)

(iii) $\mu([0, 1]^d) = 1$ (Normiertheit)

Zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^d$ heißen dabei kongruent ($A \cong B$), wenn es eine Bewegung $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ gibt mit $\varphi(A) = B$.

Giuseppe Vitali bewies bereits 1905, dass das Problem keine Lösung besitzt. Für einen Beweis dieser Tatsache siehe z.B. [Bea04, S.142f]. Fraglich war, ob das Problem durch abgeschwächte Forderungen lösbar wird. Verzichtet man bei einem Maß auf die σ -Additivität und fordert stattdessen nur endliche Additivität, erhält man den Begriff des Inhalts. Analog zum Maßproblem ist also eine Funktion $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ ($d \in \mathbb{N}$) gesucht, die folgende Eigenschaften hat:

(i) für alle $A, B \subset \mathbb{R}^d$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) \quad (\text{endliche Additivität})$$

(ii) für alle $A, B \subset \mathbb{R}^d$ mit $A \cong B$ gilt:

$$m(A) = m(B) \quad (\text{Bewegungsinvarianz})$$

(iii) $m([0, 1]^d) = 1$ (Normiertheit)

1924 bewiesen Stefan Banach und Alfred Tarski den folgenden Satz, aus dem sofort die Unlösbarkeit des Inhaltsproblems in \mathbb{R}^d für $d \geq 3$ folgt.

Satz (Banach und Tarski). *Sei $d \geq 3$ und $A, D \subset \mathbb{R}^d$ seien beschränkte Mengen mit nichtleerem Inneren. Dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ und paarweise disjunkte Mengen $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{R}^d$ so, dass $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ und $A_i \cong D_i$ ($i = 1, \dots, n$).*

Sind nun $A := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskugel und $D := B \cup C$ mit den Einheitskugeln $B := A + b$ mit Mittelpunkt $b := (0, 0, 3)^T$ bzw. $C := A + c$ mit Mittelpunkt $c := (0, 0, -3)^T$, so ergibt sich ein Spezialfall, der oft als Paradoxon von Banach und Tarski bezeichnet wird. Das Wort „Paradoxon“ soll hierbei nicht andeuten, dass der Satz widersprüchlich ist. Er widerspricht lediglich unserer Intuition und ist auch in unserer physikalischen Welt unmöglich, denn er besagt, dass man eine Kugel in sechs Teilmengen aufteilen kann, diese Teilmengen dreht und verschiebt und schließlich zwei Kugeln erhält, die beide so groß wie die ursprüngliche

Kugel sind. Das Volumen hätte sich verdoppelt, was nur den Schluss zulässt, dass die betrachteten Mengen keinen sinnvollen Inhalt haben können.

Satz 1.1 (Banach Tarski Paradoxon). *Es existieren paarweise disjunkte Mengen $A'_1, \dots, A'_6, B'_1, B'_2, B'_3, C'_1, C'_2, C'_3$ so, dass*

$$A = \bigcup_{i=1}^6 A'_i, \quad B = B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3, \quad C = C'_1 \cup C'_2 \cup C'_3$$

$$A'_i \cong B'_i, \quad A'_{i+3} \cong C'_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Wir werden nun diesen Spezialfall beweisen und uns dabei an [Bea04] orientieren.

2. FREIE GRUPPEN

Für den Beweis des Banach Tarski Paradoxons müssen wir uns näher mit den Bewegungen im \mathbb{R}^3 beschäftigen. Eine Teilmenge dieser Bewegungen ist die Menge aller Drehungen im \mathbb{R}^3 . Diese Drehungen tragen eine Gruppenstruktur, weshalb wir zunächst einen Blick auf allgemeine Gruppen werfen.

Sei (H, \cdot) eine Gruppe und $\sigma, \tau \in H$. Die von σ und τ erzeugte Untergruppe $G := \langle \sigma, \tau \rangle$ besteht aus dem Einselement von H sowie allen Ausdrücken der Form

$$(2.1) \quad \mu = \sigma^{j_1} \tau^{k_1} \sigma^{j_2} \tau^{k_2} \dots \sigma^{j_n} \tau^{k_n} \quad (n \in \mathbb{N}, j_i, k_i \in \mathbb{Z})$$

wobei der Eindeutigkeit wegen gelte: $j_i \neq 0$ falls $i \neq 1$, $k_i \neq 0$ falls $i \neq n$ und $k_1 \neq 0$ oder $j_1 \neq 0$ falls $n = 1$.

Wir nennen die Gruppe G frei oder frei erzeugt, falls für alle $\mu \in G \setminus \{1_H\}$ die Koeffizienten j_i und k_i eindeutig bestimmt sind. Das ist äquivalent dazu, dass $1 := 1_H$ keine Darstellung der Form (2.1) hat, denn gibt es zwei verschiedene Darstellungen μ_1 und μ_2 von $\mu \in H$, so ist $1 = \mu_1 \mu_2^{-1}$ nach eventuellem Kürzen der Exponenten eine Darstellung des Einselements der Form (2.1). Gibt es andererseits eine solche Darstellung von 1 , so sind $\mu = 1\mu$ nach eventuellem Kürzen der Exponenten zwei verschiedene Darstellungen des Elements $\mu \in G \setminus \{1\}$.

Ein erstes Lemma, das für den Beweis des Banach Tarski Paradoxons nötig ist, liefert disjunkte, echte Teilmengen einer freien Gruppe G , aus denen sich die Gruppe durch Multiplikation mit lediglich einzelnen weiteren Elementen zweimal erzeugen lässt.

Lemma 2.1. *Sei G eine von σ und τ frei erzeugte Untergruppe von (H, \cdot) . Dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $H_1, H_2, H_3, H_4 \subset G$, deren Vereinigung eine echte Teilmenge von $G \setminus \{1\}$ ist so, dass gilt:*

$$\begin{aligned} G &= \sigma H_1 \cup \tau H_2 & \text{und} & & \sigma H_1 \cap \tau H_2 &= \emptyset \\ G &= \sigma^{-1} H_3 \cup \tau^{-1} H_4 & \text{und} & & \sigma^{-1} H_3 \cap \tau^{-1} H_4 &= \emptyset \end{aligned}$$

Beweis. Sei $W(\sigma^{-1})$ die Menge der Elemente von G , deren Darstellung in (2.1) mit σ^{-1} beginnt, d.h. $j_1 < 1$, in $W(\tau)$ seien die Elemente, die mit τ beginnen, d.h. $j_1 = 0, k_1 > 1$ usw. Mit diesen Bezeichnungen lässt sich G als disjunkte Vereinigung der fünf Mengen $\{1\}, W(\sigma), W(\sigma^{-1}), W(\tau)$ und $W(\tau^{-1})$ schreiben.

Seien nun

$$\begin{aligned} H_1 &:= W(\sigma^{-1}), & H_2 &:= W(\tau^{-1}\sigma) \\ H_3 &:= W(\sigma), & H_4 &:= W(\tau\sigma^{-1}) \end{aligned}$$

Diese vier Mengen sind offensichtlich paarweise disjunkt und ihre Vereinigung enthält z.B. weder 1 noch τ^n ($n \in \mathbb{Z}$). Betrachtet man nun $h \in \{1\} \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$, so gilt $\sigma^{-1}h \in H_1$. Umgekehrt gilt $\sigma h \in \{1\} \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$ falls $h \in H_1$.

Somit folgt $\sigma H_1 = \{1\} \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$. Es ist klar, dass $\tau H_2 = W(\sigma)$. Analog sieht man, dass $G = \sigma^{-1}H_3 \cup \tau^{-1}H_4$. \square

3. DIE GRUPPE $SO(3)$

Die Erkenntnisse aus Abschnitt 2 können wir nun auf die Gruppe der Drehungen im \mathbb{R}^3 übertragen. Diese Gruppe entspricht der Menge $SO(3)$ der orthogonalen 3×3 -Matrizen mit Determinante 1. Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass $SO(3)$ eine freie Untergruppe G enthält, auf die man dann Lemma 2.1 anwenden kann.

Durch Basiswechsel kann man Matrizen aus $SO(2)$ stets auf die Form

$$\mu_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

bringen. Mit Hilfe der Additionstheoreme $\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ und $\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ folgt sofort, dass $\mu_{\theta_1} \mu_{\theta_2} = \mu_{\theta_1 + \theta_2}$ und insbesondere $\mu_\theta^n = \mu_{n\theta}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Diese Ergebnisse übertragen sich auch sofort auf Matrizen aus $SO(3)$ mit gleicher Drehachse.

Die eulersche Identität liefert $\cos n\theta = \operatorname{Re} e^{in\theta}$ und $\sin n\theta = \operatorname{Im} e^{in\theta}$. Seien $\alpha := \cos \theta$ und $\beta := \sin \theta$, dann folgt aus dem binomische Lehrsatz

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} i^k \beta^k = \sum_{k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} i^k \beta^k \\ &= \sum_k \binom{n}{2k} \alpha^{n-2k} (-1)^k \beta^{2k} \end{aligned}$$

und analog $\sin n\theta = \sum_k \binom{n}{2k+1} \alpha^{n-(2k+1)} (-1)^k \beta^{2k+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Seien nun $\alpha = \frac{1}{3}$ und $\beta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. Wegen $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gibt es einen Winkel $\theta \in [0, 2\pi]$ mit $\cos \theta = \alpha$ und $\sin \theta = \beta$ und damit gilt in der obigen Darstellung

$$\cos n\theta = 3^{-n} \sum_k \binom{n}{2k} (-8)^k \quad \text{und} \quad \sin n\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3^n} \sum_k \binom{n}{2k+1} (-8)^k$$

Diese Summen wollen wir genauer untersuchen. Der Binomische Lehrsatz liefert uns $2^n + 0 = (1+1)^n + (1-1)^n = \sum_k \binom{n}{k} + (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ gerade}} 2 \binom{n}{k}$ und somit gilt $\sum_k \binom{n}{2k} = \sum_k \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$. Zusätzlich gilt $-8 \equiv 1 \pmod{3}$, also auch $(-8)^k \equiv 1 \pmod{3}$. Setzen wir diese Überlegungen in die obigen Darstellungen für Kosinus und Sinus ein, erhalten wir $\cos n\theta = \frac{\alpha_n}{3^{|n|}}$ und $\sin n\theta = \beta_n \frac{2\sqrt{2}}{3^{|n|}}$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) wobei α_n und β_n ganze, nicht durch 3 teilbare Zahlen sind.

Mit diesen Überlegungen können wir nun zeigen:

Lemma 3.1. *Es gibt $\sigma, \tau \in SO(3)$ so, dass $G := \langle \sigma, \tau \rangle$ eine freie Untergruppe ist.*

Beweis. Seien $\sigma := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in SO(3)$ mit α und β

so wie oben gewählt. Es reicht zu zeigen, dass $\mu \in G$ in der Form (2.1) nicht das

Einselement ist und dazu genügt es, einen Vektor zu finden, der von μ nicht auf sich selbst abgeworfen wird. Für $x := (0, 0, 1)^T$ gilt

$$\mu x = 3^{-N} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ wobei } N := \sum_{m=1}^n |j_m| + |k_m|$$

Weiter gilt $3 \mid c$ falls $j_1 \neq 0$ und $3 \mid a$ falls $j_1 = 0$, $k_1 \neq 0$.

Für $N = 1$ gilt entweder $j_1 = \pm 1$ oder $k_1 = \pm 1$ und alle anderen Koeffizienten sind jeweils 0. Im ersten Fall ist $\sigma^{\pm 1}x = \frac{1}{3}(0, 0, 3)^T$, im zweiten Fall gilt $\tau^{\pm 1}x = \frac{1}{3}(0, \mp 2\sqrt{2}, 1)^T$. Für $N > 1$ folgt die Behauptung per Induktion, wobei die Fälle $j_1 \neq 0$ und $j_1 = 0$, $k_1 \neq 0$ unterschieden werden.

$$\begin{aligned} \text{Im ersten Fall ist } \mu x &= \sigma^{\pm 1}(\sigma^{\mp 1}\mu)x = \sigma^{\pm 1} \frac{1}{3^{N-1}}(a, b\sqrt{2}, c)^T \\ &= \frac{1}{3^N}(a \mp 4b, (b \pm 2a)\sqrt{2}, 3c)^T \text{ wobei } 3 \mid 3c. \text{ Der zweite Fall liefert } \mu x = \tau^{\pm 1}(\tau^{\mp 1}\mu)x \\ &= \tau^{\pm 1} \frac{1}{3^{N-1}}(a, b\sqrt{2}, c)^T = \frac{1}{3^N}(3a, (b \mp 2c)\sqrt{2}, c \pm 4b)^T \text{ und } 3 \mid 3a. \end{aligned}$$

Für $k_n \neq 0$ gilt nun $3 \nmid b$, insbesondere ist der mittlere Eintrag also nicht 0. Für $n = 1$ ist $\mu = \tau^{k_1}(k_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ und mit den Vorüberlegungen gilt $\tau^{k_1}x = \frac{1}{3^{|k_1|}}(0, \mp \beta_{k_1} 2\sqrt{2}, \alpha_{k_1})^T$ wobei $3 \nmid \beta_{k_1}$. Sei nun $n > 1$, dann folgt die Behauptung wieder per Induktion, wobei die Fälle $j_1 = 0$ und $j_1 \neq 0$ unterschieden werden müssen. Im ersten Fall gilt $\mu x = \tau^{k_1}(\tau^{-k_1}\mu)x = \tau^{k_1} \frac{1}{3^{N-|k_1|}}(a, b\sqrt{2}, c)^T = \frac{1}{3^N}(3^{|k_1|}a, (\alpha_{k_1}b \mp 2c\beta_{k_1})\sqrt{2}, c\alpha_{k_1} \pm 4b\beta_{k_1})^T$, wobei $3 \nmid b, \alpha_{k_1}$ und $3 \mid c$, da $j_2 \neq 0$. Somit ist $\alpha_{k_1}b \mp 2c\beta_{k_1}$ nicht durch 3 teilbar.

Im zweiten Fall folgt analog $\mu x = \frac{1}{3^N}(a\alpha_{j_1} \mp 4b\beta_{j_1}, (b\alpha_{j_1} \pm 2a\beta_{j_1})\sqrt{2}, 3^{|j_1|}c)^T$ wobei $3 \nmid b, \alpha_{j_1}$ und $3 \mid a$, da $k_1 \neq 0$. Somit ist $b\alpha_{j_1} \pm 4a\beta_{j_1}$ nicht durch 3 teilbar.

Sei nun $k_n = 0$ und $n \neq 1$. Angenommen $\mu = 1$, dann folgt $\sigma^{j_n}\mu\sigma^{-j_n}x = x$, was einen Widerspruch liefert, denn $\sigma^{j_n}\mu\sigma^{-j_n}$ ist von der oben betrachteten Form. Falls $n = 1$, so ist $\mu = \sigma^{j_1}$ und nach den Vorüberlegungen wird z.B. der Vektor $(1, 0, 0)^T$ nicht auf sich selbst abgeworfen. \square

4. DIE BAHNEN DER GRUPPENWIRKUNG

Im folgenden sei G stets die von σ und τ frei erzeugte Untergruppe von $SO(3)$. Wegen der Orthogonalität aller Matrizen in G , $E_3x = x$ und $\mu(\nu x) = (\mu\nu)x$ ($x \in A, \mu, \nu \in G$) wirkt diese Untergruppe auf die Einheitskugel A durch Linksmultiplikation. Die Bahnen der Gruppenwirkung sind definiert als $Gx := \{gx : g \in G\}$ ($x \in A$). Jede Bahn ungleich $\{0\}$ ist unendlich, denn sei Gx eine endliche Bahn mit $x \neq 0$, dann ist auch $\{\sigma^n x : n \in \mathbb{Z}\}$ endlich und somit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sigma^k x = x$ für alle Vielfachen k von n . Analog gibt es auch ein m mit $\tau^k x = x$ für alle Vielfachen k von m . Damit gibt es ein k mit $\sigma^k x = \tau^k x = x$. Da $\sigma^k \neq 1$ und $\tau^k \neq 1$ liegt x also auf der Drehachse von σ und τ . Die Definition von σ und τ liefert $x = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Zusätzlich ist n in (2.1) stets eine endliche Zahl und damit ist die Gruppe G abzählbar. Somit ist jede Bahn außer $\{0\}$ abzählbar unendlich.

Da zwei Bahnen einer Gruppenwirkung entweder disjunkt oder gleich sind, ist

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in Gy \quad (x, y \in A)$$

eine Äquivalenzrelation. Seien O_i , ($i \in I$) die Äquivalenzklassen ohne den Ursprung. Wegen der Abzählbarkeit jeder Bahn O_i und der Überabzählbarkeit von A ist I

überabzählbar. Nach dem Auswahlaxiom ist es möglich, aus jeder Bahn O_i einen Repräsentanten x_i mit $Gx_i = O_i$ auszuwählen. Sei $X := \{x_i : i \in I\}$ die Menge der Repräsentanten, dann gilt $GX = A \setminus \{0\}$. Die Menge X ist nicht messbar, denn sei $G = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann gilt $\lambda(A) = \lambda(A \setminus \{0\}) = \lambda(GX) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(g_n X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(X)$. Da A endliches Maß hat, gibt es keinen sinnvollen Wert für $\lambda(X)$. Wir können X aber auch benutzen, um Lemma 2.1 auf die Einheitskugel A zu übertragen.

Lemma 4.1. *Es gibt paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_4 \subset A$, deren Vereinigung eine echte Teilmenge von A ist so, dass*

$$\begin{aligned} A &= \sigma A_1 \cup \tau A_2 & \text{und} & & \sigma A_1 \cap \tau A_2 &= \emptyset \\ A &= \{0\} \cup \sigma^{-1} A_3 \cup \tau^{-1} A_4 & \text{und} & & \sigma^{-1} A_3 \cup \tau^{-1} A_4 &= \emptyset \end{aligned}$$

Beweis. Seien die Mengen H_j ($j = 1, \dots, 4$) wie in Lemma 2.1 gewählt und seien

$$\begin{aligned} A_1 &:= H_1 X \cup \{0\}, & A_4 &:= H_4 X \\ \tilde{A}_2 &:= H_2 X, & \tilde{A}_3 &:= H_3 X \\ A_2 &:= \tilde{A}_2 \setminus \{\tau^{-1} \sigma A_1 \cap \tilde{A}_2\} \\ A_3 &:= \tilde{A}_3 \setminus \{\tau \sigma^{-1} \tilde{A}_3 \cap A_4\} \end{aligned}$$

Aus der Wahl von A_2 und A_3 folgt die Disjunktheit von σA_1 und τA_2 sowie von $\sigma^{-1} A_3$ und $\tau^{-1} A_4$. Es ist $\tau(\tau^{-1} \sigma A_1 \cap \tilde{A}_2)$ eine Teilmenge von σA_1 und somit folgt $\sigma A_1 \cup \tau A_2 = \{0\} \cup \sigma H_1 X \cup \tau H_2 X = \{0\} \cup GX = A$. Analog sieht man, dass $A = \{0\} \cup \sigma^{-1} A_3 \cup \tau^{-1} A_4$ wobei zu beachten ist, dass $\sigma^{-1}(\tau \sigma^{-1} \tilde{A}_3 \cap A_4) \subset W(\sigma^{-1})X = \tau^{-1} H_4 X$.

Da 1 in keiner Menge H_i liegt, ist kein x aus X in der Vereinigung der A_i enthalten. \square

5. DER BEWEIS DES BANACH TARSKI PARADOXONS

Die Überlegungen aus Abschnitt 4 nutzen nur Drehungen und noch keine Verschiebungen. Mit zusätzlichen Verschiebungen können wir nun ein letztes Lemma zeigen.

Lemma 5.1. *Es gibt paarweise disjunkte Mengen B_1, B_2, C_1, C_2, C_3 und eine Funktion $f : B \cup C \rightarrow A$ derart, dass gilt:*

$B = B_1 \cup B_2$, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, die Mengen $f(B_1), f(B_2), f(C_1), f(C_2), f(C_3)$ sind paarweise disjunkt und f , eingeschränkt auf B_i oder C_j ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3$), ist eine Bewegung.

Beweis. Wir wählen die Mengen A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) wie in Lemma 4.1 und definieren $\hat{f} : \bigcup_i A_i \rightarrow B \cup C$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sigma x + b \quad (x \in A_1) \\ x &\mapsto \tau x + b \quad (x \in A_2) \end{aligned}$$

Bezeichnet man $B_1 := \hat{f}(A_1)$ und $B_2 := \hat{f}(A_2)$, so gilt nach Lemma 4.1 bereits $B = B_1 \cup B_2$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Analog definieren wir für C

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sigma^{-1} x + c \quad (x \in A_3) \\ x &\mapsto \tau^{-1} x + c \quad (x \in A_4) \end{aligned}$$

und bezeichnen die Bilder von A_3 und A_4 als C_1 und C_2 . Nach Lemma 4.1 sind C_1 und C_2 disjunkt und ihre Vereinigung ist $C \setminus \{0\}$. Aus Lemma 4.1 folgt außerdem, dass es ein $x^* \in A \setminus \bigcup_i A_i$ gibt. Eine Translation um $c - x^*$ verschiebt $\{x^*\}$ auf

$$C_3 := \{c\}$$

Sei nun f die Umkehrabbildung von \hat{f} auf $D \setminus \{c\}$ und $f(c) := x^*$, dann erfüllt f alle geforderten Bedingungen. \square

Dies zeigt, dass es sogar eine echte Teilmenge $A' = \bigcup_i A_i \cup \{x^*\}$ von A gibt, aus der sich die Kugeln B und C nur durch Bewegungen von Teilmengen von A' erzeugen lassen. Damit können wir nun das Banach Tarski Paradoxon beweisen.

Beweis des Banach Tarski Paradoxons. Es sei $g : A \rightarrow B \cup C$ die Translation um b , dann gilt $g(A) = B$. Lemma 4.1 liefert eine injektive Abbildung $f : B \cup C \rightarrow A$.

Gibt es für ein $x \in A$ ein $y \in D$ mit $f(y) = x$ so bezeichnen wir y als Vorgänger von x . Analog ist $x \in A$ der Vorgänger von $y \in D$, falls $g(x) = y$ (welcher genau dann existiert, wenn $y \in B$). Die Vorgängersuche für einen Punkt $x \in A \cup D$ ist die sukzessive Suche nach Vorgängern, startend in x . Diese Suche kann entweder in A oder D abbrechen oder sie endet nicht.

Dies erlaubt uns eine Zerlegung von A und D in jeweils drei disjunkte Teilmengen.

$$\begin{aligned} A_f &:= \{x \in A : \text{die Vorgängersuche endet in } D\} \\ A_g &:= \{x \in A : \text{die Vorgängersuche endet in } A\} \\ A_\infty &:= \{x \in A : \text{die Vorgängersuche endet nicht}\} \end{aligned}$$

Und analog

$$\begin{aligned} D_f &:= \{x \in D : \text{die Vorgängersuche endet in } D\} \\ D_g &:= \{x \in D : \text{die Vorgängersuche endet in } A\} \\ D_\infty &:= \{x \in D : \text{die Vorgängersuche endet nicht}\} \end{aligned}$$

Es ist nun $f : D_f \rightarrow A_f$ auch bijektiv, denn für alle $x \in A_f$ endet die Vorgängersuche in D und somit hat x einen Vorgänger $y \in D$. Da für y die Vorgängersuche ebenfalls in D enden muss folgt $y \in D_f$. Analog sieht man, dass $g : A_g \rightarrow D_g$ bijektiv ist und ebenso, dass $f(D_\infty) = A_\infty$ und $g(A_\infty) = D_\infty$.

Seien nun

$$\begin{aligned} B'_i &:= B_i \cap (D_f \cup D_\infty) \quad (i = 1, 2) \\ B'_3 &:= B \cap D_g \end{aligned}$$

mit Mengen B_i wie in Lemma 5.1. Es sind D_f , D_g und D_∞ paarweise disjunkt und nach Lemma 4.1 gilt auch $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Somit sind B'_1 , B'_2 und B'_3 paarweise disjunkt. Aus Lemma 5.1 folgt außerdem

$$\begin{aligned} B &= B_1 \cup B_2 \\ &= (B_1 \cap (D_f \cup D_\infty)) \cup (B_1 \cap D_g) \cup (B_2 \cap (D_f \cup D_\infty)) \cup (B_2 \cap D_g) \\ &= B'_1 \cup B'_2 \cup (B \cap D_g) = B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3 \end{aligned}$$

Sei $x \in C$, dann hat x keinen Vorgänger. Somit endet die Vorgängersuche sofort in $C \subset D$ und $C \cap D_g = C \cap D_\infty = \emptyset$. Wir können also $C'_i := C_i$ ($i = 1, 2, 3$) setzen, wobei die Mengen C_i wieder aus Lemma 5.1 stammen.

Mit diesen Wahlen setzen wir nun für A

$$\begin{aligned} A'_i &:= f(B'_i) \quad (i = 1, 2) \\ A'_3 &:= g^{-1}(B'_3) \\ A'_{j+3} &:= f(C'_j) \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} A &= A_f \cup A_\infty \cup A_g = f(D_f) \cup f(D_\infty) \cup g^{-1}(D_g) \\ &= f(B'_1 \cup B'_2 \cup C'_1 \cup C'_2 \cup C'_3) \cup g^{-1}(B'_3) \\ &= f(B'_1) \cup f(B'_2) \cup f(C'_1) \cup f(C'_2) \cup f(C'_3) \cup A'_3 \\ &= A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3 \cup A'_4 \cup A'_5 \cup A'_6 \end{aligned}$$

Die paarweise Disjunktheit von $A'_1, A'_2, A'_4, A'_5, A'_6$ folgt nun aus den Eigenschaften von f . Sei $x \in A'_j \cap A'_3$ ($j \neq 3$), dann gilt $x \in f(D_f \cup D_\infty)$. Damit existiert ein $y \in D_f \cup D_\infty$ mit $f(y) = x$ und da y der Vorgänger von x ist, endet die Vorgängersuche für x genau wie für y in D oder gar nicht. Gleichzeitig gilt auch $x \in g^{-1}(D_g)$ womit x der Vorgänger eines $y \in D_g$ ist. Damit folgt ein Widerspruch, denn die Vorgängersuche müsste für x somit in A enden. Also sind alle Mengen A'_i paarweise disjunkt. \square

Aus dem Banach Tarski Paradoxon lässt sich genauso wie aus dem Satz von Banach und Tarski folgern, dass das Inhaltsproblem für $d \geq 3$ keine Lösung besitzt. Gäbe es nämlich eine Lösung, so hätte die Einheitskugel einen Inhalt ungleich 0. Es folgt mit der endlichen Additivität und der Bewegungsinvarianz der Widerspruch $m(A) = m(B) + m(C) = m(A+b) + m(A+c) = 2m(A)$. Für höhere Dimensionen folgt die Unlösbarkeit nun ebenso, indem wir jede Menge M , die im Beweis auftaucht, durch $M \times [0, 1]^{d-3}$ ersetzen und die verwendeten Drehmatrizen mit Einheitsmatrizen vergrößern.

In seinem Buch „Grundzüge der Mengenlehre“ bewies Felix Hausdorff bereits 1914 mit den gleichen Methoden, dass es keinen rotationsinvarianten Inhalt auf der Kugeloberfläche geben kann, der der gesamten Oberfläche einen Wert ungleich 0 zuordnet. Damit lässt sich ebenfalls folgern, dass das Inhaltsproblem in höheren Dimensionen als 2 keine Lösung besitzt. Die Beweise von Banach, Tarski und Hausdorff können allerdings nicht auf die Fälle $d = 1, 2$ übertragen werden, denn $SO(1)$ und $SO(2)$ haben keine freien Untergruppen, die von zwei Elementen erzeugt sind.

LITERATUR

- [Bea04] R. Beals. *Analysis: An Introduction*. Cambridge University Press, 2004.
[Els10] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer, 2010.