DER SATZ VON LUSIN

MARKUS SCHUSTER

1. Motivation

Aus der Definition der Borelschen σ-Algebra folgt sofort, dass stetige Funktionen messbar sind. Es liegt nahe, dass man eine Umkehrung dieser Beziehung sucht. Offensichtlich sind Borel-messbare Funktionen nicht notwendigerweise stetig. Der Satz von Lusin stellt nun eine Beziehung zwischen Borel-Messbarkeit und Stetigkeit her. Er besagt, dass eine Borel-Messbare Funktion auf eine kompakte Menge so einschränkbar ist, dass die Funktion dort stetig ist. Das Maß des Komplements der kompakten Menge kann beliebig klein gemacht werden kann. Das heißt, dass die Funktion "fast-stetig" ist.

Beispiel 1.1. Einführendes Beispiel:
Es sei f die Dirichlet-Funktion auf $[0,1]$, d.h. $f(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$. f ist in keinem Punkt stetig. Sei r_n eine Abzählung von $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ und $U_n := \left(r_n - \frac{\delta}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\delta}{2^{n+2}}\right) \cap [0,1]$ für ein $\delta > 0$. $\Rightarrow K^c := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ ist offen und alle r_n sind in K^c. $f|_K \equiv 0 \Rightarrow f|_K$ ist stetig und das Lebesgue-Maß von K^c ist kleiner gleich δ.

2. Definitionen

Für die Formulierung des Satzes sind einige Definitionen notwendig:

Definition 2.1.
Es sei Ω ein metrischer Raum mit Metrik d.

Ω heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge von Punkten aus Ω in Ω konvergiert.

Eine Menge $M \subset \Omega$ liegt *dicht* in Ω, falls $\forall x \in \Omega$ und $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in M$ sodass $d(x,y) < \varepsilon$.

Ω heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge von Ω gibt.

Definition 2.2.
Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

Das Maß μ heißt *σ-endlich*, wenn es eine abzählbare Folge messbarer Mengen endlichen Maßes $(A_1, A_2, \ldots)$ gibt, die den Gesamtraum aufspannen.

Eine Menge $A \in \Sigma$ heißt von *innen regulär*, falls $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K$ kompakt$\}$. Das Maß μ heißt von *innen regulär*, wenn alle $A \in \Sigma$ von innen regulär sind.

Eine Menge $A \in \Sigma$ heißt von *außen regulär*, falls $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A, U$ offen$\}$. Das Maß μ heißt von außen regulär, wenn alle $A \in \Sigma$ von außen regulär sind.

Eine Menge $A \in \Sigma$ heißt *regulär*, falls sie von innen und außen regulär ist.
Das Maß μ heißt *regulär*, falls alle $A \in \Sigma$ regulär sind.

3. Der Satz

Satz 3.1 (Der Satz von Lusin).
Es seien X ein metrischer-Raum, Y ein vollständiger separabler metrischer Raum, μ ein σ-endliches reguläres Borel-Maß auf $\mathscr{B}(X)$ und $f : X \to Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Es gibt eine Borel-messbare Funktion $g : X \to Y$ mit $f = g$ μ-f.ü..
(b) Zu jedem offenen $U \subset X$ mit $\mu(U) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset U$ mit $\mu(U \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.
(c) Zu jedem $A \in \mathscr{B}(X)$ mit $\mu(A) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset A$ mit $\mu(A \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.
(d) Zu jeder kompakten Menge $T \subset X$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset T$ mit $\mu(T \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.
(e) Es existiert ein Zerlegung von X in eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakter Mengen und in eine μ-Nullmenge $N \in \mathscr{B}(X)$ derart, dass die Restriktion von f auf jede der Mengen K_n stetig ist.

Beweis. Beweisschema:

$$\begin{array}{ccccccccc} (a) & \Rightarrow & (b) & \Rightarrow & (c) & \Rightarrow & (e) & \Rightarrow & (a) \\ & & & & \Updownarrow & & & & \\ & & & & (d) & & & & \end{array}$$

Wir nehmen zunächst an, dass $\mu(X) < \infty$.
(a) $\Rightarrow$ (b):
Es genügt die Behauptung für $U = X$ zu zeigen. Sei $\{(b_n) | n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von Y und es sei $\delta > 0$.
Nun sei $B_{n,k} := \left\{\in Y | d(y, b_n) < \frac{1}{k}\right\}$ für $n, k \in \mathbb{N}$.
Mit Hilfe der Regularität des Maßes μ bekommt man für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ein komkaptes $K_{n,k}$ und ein offenes $U_{n,k}$ mit $K_{n,k} \subset g^{-1}(B_{n,k}) \subset U_{n,k}$. Das Maß des Schnittes von $U_{n,k} \backslash K_{n,k}$ sei kleiner als $\delta \cdot 4^{-(nk)}$.
Nun definiere $V := \bigcup_{n,k=1}^{\infty} (U_{n,k} \backslash K_{n,k})$ welches, als Vereinigung von offenen Mengen, offen ist und dessen Maß

$$\mu(V) \leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \mu(U_{n,k} \backslash K_{n,k}) = \delta \cdot \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{nk}} = \delta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-1 + 4^n} < \delta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\delta}{2}.$$

Weiter sei $h := g|_{V^c}$. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$U_{n,k} \cap V^c = K_{n,k} \cap V^c \subset g^{-1}(B_{n,k}) \cap V^c = h^{-1}(B_{n,k}) = g^{-1}(B_{n,k}) \cap V^c \subset U_{n,k} \cap V^c$$

das heißt $h^{-1}(B_{n,k}) = U_{n,k} \cap V^c$ ist offen in V^c.
Sei nun $O \subset Y$ offen. $\Rightarrow \forall y \in O \exists k > 0$, sodass $B(y, 2/k) \subset O$. Da b_n dicht in Y liegt, $\exists n \in \mathbb{N}$, sodass $b_n \in B(y, 1/k) \Rightarrow y \in B_{n,k} = B(b_n, 1/k) =\subset O$. Daraus folgt, dass O die Vereiningung von ausgewählten $B_{n,k}$ ist. Somit ist $h^{-1}(O) = \bigcup h^{-1}(B_{n,k})$ offen. Also ist das Urbild einer offenen Menge offen $\Rightarrow h$ ist stetig.
Weiter sei $N \in \mathscr{B}(X)$ die μ-Nullmenge mit $f|_{N^c} = g|_{N^c}$, die man aus der Voraussetzung (a) erhält. Benutzt man erneut die innere Regularität von μ , so liefert diese die Existenz einer kompakten Menge $K \subset (V \cup N)^c = V^c \cap N^c$ mit $\mu((V \cup N)^c \backslash K) < \delta/2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu(K^c) = \mu(X \cap K^c) &= \mu(((V \cup N) \backslash K) \cup (V^c \cap N^c \cap K)) \\ &\leq \mu(V \cup N) + \mu((V \cup N)^c \backslash K) < \delta, \end{aligned}$$

und $f|_K = g|_K = h|_K$ ist wegen $K \subset V^c$ stetig.
Das heißt, es wurde eine kompakte Menge K gefunden, sodass f eingeschränkt auf K stetig und $\mu(K^c) < \delta$

(b) $\Rightarrow$ (c):
Es sei $A \in \mathscr{B}, \mu(A) < \infty$. Dann folgt aus der Regularität, dass eine offene Menge $U \supset A$ und eine kompakte Menge $K \subset A$ existieren, mit $\mu(U \backslash K) < \delta/2$. Nach b) gibt es eine kompakte Menge $L \subset U$ mit $\mu(U \backslash L) < \delta/2$, so dass $f|_L$ stetig ist. Nun ist $K \cap L \subset A$ eine kompakte Menge mit $\mu(A \backslash (K \cap L)) \leq \mu(A \backslash K) + \mu(A \backslash L) < \delta$, und $f|_{K \cap L}$ ist stetig, da K geschnitten mit L eine Teilmenge von K ist, und f nach Voraussetzung bereits auf K stetig ist.

(c) $\Rightarrow$ (d):
Diese Implikation ist klar, da kompakte Mengen in der Borelschen σ-Algebra liegen.

(d) $\Rightarrow$ (c): Es sei $A \in \mathscr{B}(X), \mu(A) < \infty$ und $\delta > 0$. Abermals bekommt man mit Hilfe der Regularität eine kompakte Menge $T \subset A$ mit $\mu(A \backslash T) < \delta/2$. Zu T wählen wir nach (d) eine kompakte Menge $K \subset T$ mit $\mu(T \backslash K) < \delta/2$, sodass $f|_K$ stetig ist. Dann leistet K das Verlangte.

(c) $\Rightarrow$ (e):
Es genügt die Existenz einer Folge (K_n) paarweise disjunkter kompakter Mengen in X mit $\mu((\bigcup_{i=1}^{n} K_i)^c) < 1/n$ und mit stetiger Restriktion von f auf K_n zu beweisen ($n \in \mathbb{N}$). Dann ist nämlich $N := (\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^c$ eine zu allen K_n disjunkte Borelsche Menge mit $\mu(N) < 1/n \ \forall n \in \mathbb{N}$, also mit $\mu(N) = 0$. Die Existenz einer solchen Folge von Mengen (K_n) ergibt sich mittels vollständiger Induktion aus (c): Zunächst existiert eine kompakte Menge $K_1 \in X$ mit $\mu(K_1^c) < 1$ und stetiger Restriktion $f|_{K_1}$. Seien nun $K_1, \ldots, K_n$ bereits definiert, so ergibt sich die Existenz einer Menge K_{n+1} mit den gewünschten Eigenschaften erneut aus (c) und der inneren Regularität von μ. Es gibt nämlich ein kompaktes $\tilde{K} \in X$ mit $\mu(\tilde{K}^c) < 1/(2(n+1))$ und stetigem $f|_{\tilde{K}}$. Zu $L := K_1 \cup \cdots \cup K_n$ existiert wegen der inneren Regularität von μ eine kompakte Menge $K_{n+1} \subset \tilde{K} \backslash L$ mit

$$\mu(\tilde{K} \backslash L) - \mu(K_{n+1}) = \mu(\tilde{K} \cap L^c \cap K_{n+1}^c) < \frac{1}{2(n+1)}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\mu((L \cup K_{n+1})^c) &= \mu(\tilde{K}^c \cap L^c \cap K_{n+1}) + \mu(\tilde{K} \cap L^c \cap K_{n+1}) \\ &\leq \mu(\tilde{K}^c) + \mu(\tilde{K} \cap L^c \cap K_{n+1}) < \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

leistet K_{n+1} das Verlangte.

(e) $\Rightarrow$ (a):
Ist $X = N \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ die aus (e) gegebene Zerlegung. Man definiere eine Abbildung $g : X \to Y$ wie folgt:
Falls $N = \emptyset$ sei $g := f$, im Falle $N \neq \emptyset$ wähle man $y_0 \in f(N)$ beliebig und setze

$$g(x) := \begin{cases} y_0, & x \in N \\ f(x), & x \in X \backslash N \end{cases}$$

Also ist $f = g$ fast überall in beiden Fällen. Zu zeigen bleibt noch die Borel-Messbarkeit von g. Diese aber ergibt sich wie folgt: Für jede in Y offene Menge G ist

$$g^{-1}(G) = (g^{-1}(G) \cap X) = (g^{-1}(G) \cap N) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ((g^{-1}(G) \cap K_n)) = N_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}(G)$$

wenn dabei $N_0 := g^{-1}(G) \cap N$ und $g_n := g|_{K_n}$ gesetzt wird. Nun ist $N_0 = N$ oder $N_0 = \emptyset$, je nachdem ob $y_0 \in G$ oder $y_0 \notin G$ gilt. Weiter ist g_n gleich der Restriktion von f auf K_n, somit ist $g_n^{-1}(G)$ nach Voraussetzung offen in K_n, also von der Form

$K_n \cap U_n$ mit einer in X offener Menge U_n. Daher treten in obiger Darstellung von $g^{-1}(G)$ nur Borelsche Mengen auf, und somit ist $g^{-1}(G)$ selbst Borelsch. Dies zeigt die Borel-Meßbarkeit von g. $\square$

Bemerkung 3.2.
Im Beweis des Satzes von Lusin wird anfangs angenommen, dass das Maß endlich ist. Im der Formulierung des Satzes wurde aber nur σ-Endlichkeit vorausgesetzt. Den Übergang von endlich zu σ-endlich schafft man wie folgt:
Es sei $\delta > 0$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen endliche Maßes, die X überdecken und existiert, da das Maß μ σ-endlich ist. Nun finden wir eine endliche Folge von Mengen $B_n = A_k$ $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq n \leq t < \infty$, sodass $\mu(X \backslash \bigcup_{n=1}^{t} B_n) < \delta/2$. Nun finden wir zu jeder der Mengen B_n eine kompakte Menge K_n, sodass $f|_{K_n}$ stetig ist, und $\mu(B_n \backslash K_n) < \delta \cdot 2^{-(n+1)}$. $\Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{t} B_n \backslash K_n) < \delta/2$. Da nun $K = \bigcup_{n=1}^{t} K_n$ kompakt ist als endliche Vereinigung von kompakten Mengen, $f|_K$ stetig ist und $\mu(X \backslash K) < \delta$ folgt die Behauptung auch für ein σ-enliches Maß.

4. Bemerkungen

Definition 4.1 (Radon-Maß)**.**
Ein von innen reguläres Borel-Maß nennt man ein Radon Maß.

Definition 4.2 (Moderates Maß)**.**
Ein Borel Maß heißt moderat, wenn Ω die Vereinigung einer Folge offenen Mengen endlichen Maßes ist.

Definition 4.3 (Polnischer Raum)**.**
Ein topologischer Raum heißt polnisch, wenn er separabel und vollständig metrisierbar ist.

Bemerkung 4.4.

(a) Die Voraussetzungen für μ bezüglich der Regularität sind z.B. erfüllt, wenn:
   (i) μ ein moderates Radon-Maß ist

   Beweis. Sei μ ein moderates Radon Maß. Aus der Definition eines moderaten Maßes bekommt man eine Folge offener Mengen $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = X$. Man definiere $\mu_n := \mu|\mathscr{B}(G_n)(n \in \mathbb{N})$. μ_n ist regulär $\forall n \in \mathbb{N}$(ohne Beweis).
   Sei $A \in \mathscr{B}(X)$ und $A_n := A \cap G_n (n \in \mathbb{N})$. Aus der Regularität von μ_n folgt für alle $\varepsilon > 0$ die Existenz einer offenen Menge U_n mit $A_n \subset U_n \subset G_n$ und $\mu(U_n \backslash A_n) = \mu_n(U_n \backslash A_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n}$
   Es folgt, dass $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ als Vereinigung von offenen Mengen offen ist. U ist offensichtlich eine Teilmenge von A und $\mu(U \backslash A) < \varepsilon$. Das bedeutet, dass μ von außen regulär ist. $\square$

   (ii) X ein polnischer Raum ist. Dies folgt aus dem Satz von Ulam: Jedes Borel-Maß auf einem polnischen Raum ist regulär und moderat.

(b) Die Implikationen (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) gelten auch ohne die Voraussetzung der σ-Endlichkeit von μ

Literatur

[Els05] Jürgen Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, fourth ed., Springer-Verlag, Berlin, 2005, Grundwissen Mathematik.

[Bau92] Heinz Bauer, Maß- und Integrationstheorie, second ed., de Gruyter Lehrbuch, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992.