ulm university universität uulm

Der Satz von Lusin

Markus Schuster | 29-30 Juni 2012 | Universität Ulm

Maßtheorie Seminar 2012

Inhaltsverzeichnis

Motivation

Stetige Funktionen sind Borel-messbar.
Umkehrung gesucht.

Einführendes Beispiel

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ ist in keinem Punkt stetig.

Sei r_n eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

$U_n := \left(r_n - \frac{\delta}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\delta}{2^{n+2}}\right) \cap [0,1]$ und sei $\delta > 0$.

$\Rightarrow K^c := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ offen $\Rightarrow r_n \in K^c \ \forall n \in \mathbb{N}$

$f|_K \equiv 0 \Rightarrow f|_K$ ist stetig.

Definition (Vollständiger Raum)

Ein metrischer Raum Ω heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge von Punkten aus Ω in Ω konvergiert.

Definition (Dichte Teilmenge)

Sei $M \subset \Omega$. M liegt dicht in Ω, falls $\forall x \in \Omega$ und $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in M$ sodass $d(x, y) < \varepsilon$.

Definition (Seperabel)

Ein metrischer Raum Ω heißt seperabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge gibt, die dicht in Ω liegt.

Definition (Vollständiger Raum)

Ein metrischer Raum Ω heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge von Punkten aus Ω in Ω konvergiert.

Definition (Dichte Teilmenge)

Sei $M \subset \Omega$. M liegt dicht in Ω, falls $\forall x \in \Omega$ und $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in M$ sodass $d(x, y) < \varepsilon$.

Definition (Seperabel)

Ein metrischer Raum Ω heißt seperabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge gibt, die dicht in Ω liegt.

Definition (Vollständiger Raum)

Ein metrischer Raum Ω heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge von Punkten aus Ω in Ω konvergiert.

Definition (Dichte Teilmenge)

Sei $M \subset \Omega$. M liegt dicht in Ω, falls $\forall x \in \Omega$ und $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in M$ sodass $d(x, y) < \varepsilon$.

Definition (Seperabel)

Ein metrischer Raum Ω heißt seperabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge gibt, die dicht in Ω liegt.

Definition (σ-endliches Maß)

Ein Maß heißt σ-endlich, wenn es eine abzählbare Folge messbarer Mengen $\{A_1, A_2, \ldots\}$ gibt, mit $\mu(A_k) < \infty$ und $\bigcup A_k = \Omega$.

Definition (Polnischer Raum)

Ein metrischer Raum heißt polnisch, wenn er seperabel und vollständig metrisierbar ist.

Definition (σ-endliches Maß)

Ein Maß heißt σ-endlich, wenn es eine abzählbare Folge messbarer Mengen $\{A_1, A_2, \ldots\}$ gibt, mit $\mu(A_k) < \infty$ und $\bigcup A_k = \Omega$.

Definition (Polnischer Raum)

Ein metrischer Raum heißt polnisch, wenn er seperabel und vollständig metrisierbar ist.

Definition (Von innen regulär)

Ein Maß μ heißt von innen regulär, wenn $\forall A \in \Sigma$ gilt:
$\mu(A) = sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ kompakt}\}$.

Definition (Von außen regulär)

Ein Maß μ heißt von außen regulär, wenn $\forall A \in \Sigma$ gilt:
$\mu(A) = inf\{\mu(U) : U \supset A, U \text{ offen}\}$.

Definition (Regulär)

Ein Maß μ heißt regulär, falls es von innen und von außen regulär ist.

Satz (Der Satz von Ulam)

Jedes Borel-Maß auf einem polnischen Raum ist regulär.

Satz (Der Satz von Lusin)

Es seien X ein metrische-Raum, Y sei ein vollständig seperabler metrischer Raum, μ sei ein σ-endliches reguläres Borel-Maß auf $\mathscr{B}(X)$ und $f : X \to Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *Es gibt eine Borel-messbare Funktion $g : X \to Y$ mit $f = g$ μ-f.ü..*

(b) *Zu jedem offenen $U \subset X$ mit $\mu(U) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset U$ mit $\mu(U \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(c) *Zu jedem $A \in \mathscr{B}(X)$ mit $\mu(A) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset A$ mit $\mu(A \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(d) *Zu jeder kompakten Menge $T \subset X$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset T$ mit $\mu(T \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(e) *Es existiert ein Zerlegung von X in eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakter Mengen und in eine μ-Nullmenge $N \in \mathscr{B}(X)$ derart, dass $f|_{K_n}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$*

Beweisschema:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(a) & \Rightarrow & (b) & \Rightarrow & (c) & \Rightarrow & (e) & \Rightarrow & (a) \\
 & & & & \Updownarrow & & & & \\
 & & & & (d) & & & &
\end{array}
$$

Satz (Der Satz von Lusin)

Es seien X ein metrische-Raum, Y sei ein vollständig seperabler metrischer Raum, μ sei ein σ-endliches reguläres Borel-Maß auf $\mathscr{B}(X)$ und $f : X \to Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *Es gibt eine Borel-messbare Funktion $g : X \to Y$ mit $f = g$ μ-f.ü..*

(b) *Zu jedem offenen $U \subset X$ mit $\mu(U) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset U$ mit $\mu(U \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(c) *Zu jedem $A \in \mathscr{B}(X)$ mit $\mu(A) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset A$ mit $\mu(A \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(d) *Zu jeder kompakten Menge $T \subset X$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset T$ mit $\mu(T \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(e) *Es existiert ein Zerlegung von X in eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Mengen und in eine μ-Nullmenge $N \in \mathscr{B}(X)$ derart, dass $f|_{K_n}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$*

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b): O.B.d.A. $U = X, \mu(X) < \infty$. Sei $\{(b_n) | n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von Y,

Def. $B_n := \{y \in Y | d(y, b_n) < 1/n\}$.$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = Y$

$\overset{Reg.}{\Rightarrow} \exists \, \forall n \in \mathbb{N}$ ein $K_n \in \mathscr{K}$ und $V_n \in \mathscr{O}$ mit

$$K_n \subset g^{-1}(B_n) \subset V_n$$

und $\mu(V_n \backslash K_n) < \delta \cdot 2^{-(n+1)} \Rightarrow V := \bigcup_{n=1}^{\infty}(V_n \backslash K_n)$ offen mit $\mu(V) < \delta/2$, und $h := g|_{V^c}$ ist stetig, da $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} V_n \cap V^c = K_n \cap V^c \subset g^{-1}(B_n) \cap V^c = h^{-1}(B_n) \\ = g^{-1}(B_n) \cap V^c \subset V_n \cap V^c \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ h^{-1}(B_n) = V_n \cap V^c$ *offen in* V^c $\Rightarrow h$ *stetig.*

Es sei $N \in \mathscr{B}$ *, so gewählt dass* $f|_{N^c} = g|_{N^c}$ *und* $\mu(N) = 0$.
$\overset{\text{inn.Reg.}}{\Rightarrow} \exists K \subset (V \cup N)^c = V^c \cap N^c$ *mit* $\mu((V \cup N^c) \setminus K) < \delta/2$.
Dann ist

$$\begin{aligned} \mu(K^c) = \mu(X \cap K^c) = \mu(((V \cup N) \setminus K) \cup (V^c \cap N^c \cap K)) \\ \le \mu(V \cup N) + \mu((V \cup N)^c \setminus K) < \delta, \end{aligned}$$

und $f|_K = g|_K = h|_K$ *stetig, da* $K \subset V^c$.

Satz (Der Satz von Lusin)

Es seien X ein metrische-Raum, Y sei ein vollständig seperabler metrischer Raum, μ sei ein σ-endliches reguläres Borel-Maß auf $\mathscr{B}(X)$ und $f : X \to Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *Es gibt eine Borel-messbare Funktion $g : X \to Y$ mit $f = g$ μ-f.ü..*

(b) *Zu jedem offenen $U \subset X$ mit $\mu(U) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset U$ mit $\mu(U \setminus K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(c) *Zu jedem $A \in \mathscr{B}(X)$ mit $\mu(A) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset A$ mit $\mu(A \setminus K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(d) *Zu jeder kompakten Menge $T \subset X$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset T$ mit $\mu(T \setminus K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(e) *Es existiert ein Zerlegung von X in eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakter Mengen und in eine μ-Nullmenge $N \in \mathscr{B}(X)$ derart, dass $f|_{K_n}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$*

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $A \in \mathscr{B}(X)$ mit $\mu(A) < \infty$.
$\Rightarrow \exists U \supset A$ offen und $K \subset A$ kompakt mit

$$\mu(U \backslash K) < \delta/2.$$

$\overset{(b)}{\Rightarrow} \exists L \subset U$ kompakt mit

$$\mu(U \backslash L) < \delta/2,$$

so dass $f|_L$ stetig ist. Nun ist $K \cap L \subset A$ kompakt mit

$$\mu(A \backslash (K \cap L)) \leq \mu(A \backslash K) + \mu(A \backslash L) < \delta$$

und $f|_{K \cap L}$ ist stetig.

Satz (Der Satz von Lusin)

Es seien X ein metrische-Raum, Y sei ein vollständig seperabler metrischer Raum, μ sei ein σ-endliches reguläres Borel-Maß auf $\mathscr{B}(X)$ und $f : X \to Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *Es gibt eine Borel-messbare Funktion $g : X \to Y$ mit $f = g$ μ-f.ü..*

(b) *Zu jedem offenen $U \subset X$ mit $\mu(U) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset U$ mit $\mu(U \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(c) *Zu jedem $A \in \mathscr{B}(X)$ mit $\mu(A) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset A$ mit $\mu(A \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(d) *Zu jeder kompakten Menge $T \subset X$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset T$ mit $\mu(T \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(e) *Es existiert ein Zerlegung von X in eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakter Mengen und in eine μ-Nullmenge $N \in \mathscr{B}(X)$ derart, dass $f|_{K_n}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$*

(c) $\Rightarrow$ (d): klar, da die kompakten Mengen $\mathscr{B}(X)$ erzeugen.

(d) $\Rightarrow$ (c): Sei $A \in \mathscr{B}(X)$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\delta > 0$
$\Rightarrow \exists T \subset A$ kompakt mit

$$\mu(A \setminus T) < \delta/2.$$

$\overset{(d)}{\Rightarrow}$ wähle $K \subset T$ kompakt mit

$$\mu(T \setminus K) < \delta/2$$

so dass $f|_K$ stetig ist. Dann leistet K das Verlangte.

Satz (Der Satz von Lusin)

Es seien X ein metrische-Raum, Y sei ein vollständig seperabler metrischer Raum, μ sei ein σ-endliches reguläres Borel-Maß auf $\mathscr{B}(X)$ und $f : X \to Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *Es gibt eine Borel-messbare Funktion $g : X \to Y$ mit $f = g$ μ-f.ü..*

(b) *Zu jedem offenen $U \subset X$ mit $\mu(U) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset U$ mit $\mu(U \setminus K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(c) *Zu jedem $A \in \mathscr{B}(X)$ mit $\mu(A) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset A$ mit $\mu(A \setminus K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(d) *Zu jeder kompakten Menge $T \subset X$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset T$ mit $\mu(T \setminus K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(e) *Es existiert ein Zerlegung von X in eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakter Mengen und in eine μ-Nullmenge $N \in \mathscr{B}(X)$ derart, dass $f|_{K_n}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$*

(c) $\Rightarrow$ (e): Genügt zz, dass $\exists (K_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ *mit* $K_i \cap K_j = \emptyset \; \forall i \neq j$

$$\mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right)^c\right) < 1/n$$

mit $f|_{K_n}$ *stetig* $\forall n \in \mathbb{N}$. *Dann ist*

$$N := \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i^c$$

eine zu allen K_n *disjunkte Borelsche Menge mit*

$$\mu(N) < 1/n \; \forall n \in \mathbb{N}$$

also mit $\mu(N) = 0$. *Bew per vollständiger Induktion aus (c):*

Zunächst existiert eine kompakte Menge $K_1 \in X$ *mit*

$$\mu(K_1^c) < 1$$

und $f|_{K_1}$ *stetig. Seien* $K_1, \ldots, K_n$ *bereits definiert,*
$\overset{(c)}{\Rightarrow} \exists \tilde{K}$ *kompakt mit*

$$\mu(\tilde{K}^c) < \frac{1}{2(n+1)}$$

und $f|_{\tilde{K}}$ *stetig.*

Def. $L := K_1 \cup \ldots \cup K_n$

$\overset{inn.Reg.}{\Rightarrow} \exists K_{n+1} \subset \tilde{K} \backslash L$ *kompakt mit*

$$\mu(\tilde{K} \cap L^c \cap K_{n+1}^c) < \frac{1}{2(n+1)}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mu((L \cup K_{n+1})^c) &= \mu(\tilde{K}^c \cap L^c \cap K_{n+1}) + \mu(\tilde{K} \cap L^c \cap K_{n+1}) \\ &\leq \mu(\tilde{K}^c) + \mu(\tilde{K} \cap L^c \cap K_{n+1}) < \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

leistet K_{n+1} *das Verlangte.*

Satz (Der Satz von Lusin)

Es seien X ein metrische-Raum, Y sei ein vollständig seperabler metrischer Raum, μ sei ein σ-endliches reguläres Borel-Maß auf $\mathscr{B}(X)$ und $f : X \to Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *Es gibt eine Borel-messbare Funktion $g : X \to Y$ mit $f = g$ μ-f.ü..*

(b) *Zu jedem offenen $U \subset X$ mit $\mu(U) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset U$ mit $\mu(U \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(c) *Zu jedem $A \in \mathscr{B}(X)$ mit $\mu(A) < \infty$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset A$ mit $\mu(A \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(d) *Zu jeder kompakten Menge $T \subset X$ und jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset T$ mit $\mu(T \backslash K) < \delta$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

(e) *Es existiert ein Zerlegung von X in eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Mengen und in eine μ-Nullmenge $N \in \mathscr{B}(X)$ derart, dass $f|_{K_n}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$*

(e) $\Rightarrow$ (a): Seien $X, K_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ gegeben nach (e) so dass $X = N \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.
Falls $N = \emptyset$ setze $g := f$,
sonst wähle $y_0 \in f(N)$ beliebig und setze

$$g(x) := \begin{cases} y_0, & x \in N \\ f(x), & x \in X \setminus N \end{cases}$$

$\Rightarrow g : X \to Y$ und $f = g$ μ-f.ü..
$\not{Z}$: g ist Borel-messbar.
$\forall$ G offen in Y folgt:

$$g^{-1}(G) = (g^{-1}(G) \cap X) = (g^{-1}(G) \cap N) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ((g^{-1}(G) \cap K_n))$$

$$= N_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}(G)$$

mit $N_0 := g^{-1}(G) \cap N$ *und* $g_n := g|_{K_n}$

$$\Rightarrow N_0 = \begin{cases} N, & \text{falls } y_0 \in N_0 \\ \emptyset, & \text{falls } y_0 \notin N_0 \end{cases}$$

$$g_n = g|_{K_n} = f|_{K_n} \overset{f|_{K_n} \text{stetig}}{\Rightarrow} g_n^{-1}(G) \text{ offen in } K_n$$

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}(G)$ *offen* $\Rightarrow g$ *Borel-messbar.*

Definition (Radon-Maß)

Ein von innen reguläres Borel-Maß nennt man ein Radon Maß.

Definition (Moderates Maß)

Ein Borel Maß heißt moderat, wenn Ω die Vereinigung einer Folge offenen Mengen endlichen Maßes ist.

Definition (Radon-Maß)

Ein von innen reguläres Borel-Maß nennt man ein Radon Maß.

Definition (Moderates Maß)

Ein Borel Maß heißt moderat, wenn Ω die Vereinigung einer Folge offenen Mengen endlichen Maßes ist.

Bemerkungen

Die Voraussetzungen für μ sind z.B. erfüllt, wenn:

(i) X ein polnischer Raum ist und μ ein Borel-Maß (Satz von Ulam)

(ii) μ ein moderates Radon-Maß ist

Beweis von Bem (ii)

Sei μ *ein moderates Radon Maß,*

$\Rightarrow \exists (G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *offener Mengen mit* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} = X$.

$\mu_n := \mu|\mathscr{B}(G_n)(n \in \mathbb{N})$ *ist regulär* $\forall n \in \mathbb{N}$*(ohne Beweis).*

Sei $A \in \mathscr{B}(X)$ *und* $A_n := A \cap G_n(n \in \mathbb{N})$.

$\Rightarrow \exists\forall\varepsilon > 0$ *ein* U_n *offen mit* $A_n \subset U_n \subset G_n$ *und*

$\mu(U_n \backslash A_n) = \mu_n(U_n \backslash A_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n}$

$\Rightarrow U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ *offen,* $U \supset A, \mu(U \backslash A) < \varepsilon \Rightarrow \mu$ *ist von außen*

regulär.

Literatur

- Jürgen Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie, fourth ed., Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 2005, Grundwissen Mathematik. [Basic Knowledge in Mathematics].
- Heinz Bauer, Maß- und Integrationstheorie, second ed., de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook], Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992.