Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral

Seminarvortrag von Matthias Heinlein

Einleitung: Zwei Integralbegriffe

Einleitung: Zwei Integralbegriffe

Formales Integrieren

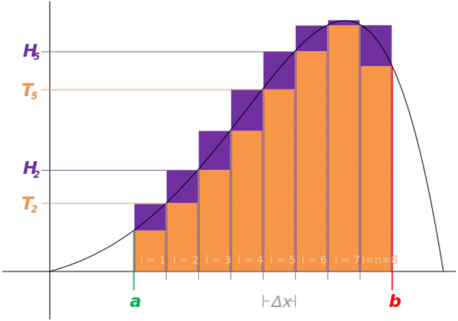
$$f'(x) = x^2 - 2x, \quad f(x) = \,?$$

Einleitung: Zwei Integralbegriffe

Formales Integrieren

$$f'(x) = x^2 - 2x, \quad f(x) = ?$$

Flächen berechnen



Einleitung: Hauptsatz beim Riemann-Integral

Einleitung: Hauptsatz beim Riemann-Integral

Hauptsatz

1. Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, so ist die Integralfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

eine Stammfunktion zu f, d.h. diffbar mit $F' = f$.

Einleitung: Hauptsatz beim Riemann-Integral

Hauptsatz

1. Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, so ist die Integralfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

eine Stammfunktion zu f, d.h. diffbar mit $F' = f$.

2. Ist F eine Stammfunktion zu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Einleitung: Hauptsatz beim Riemann-Integral

Hauptsatz

1. Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, so ist die Integralfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

eine Stammfunktion zu f, d.h. diffbar mit $F' = f$.

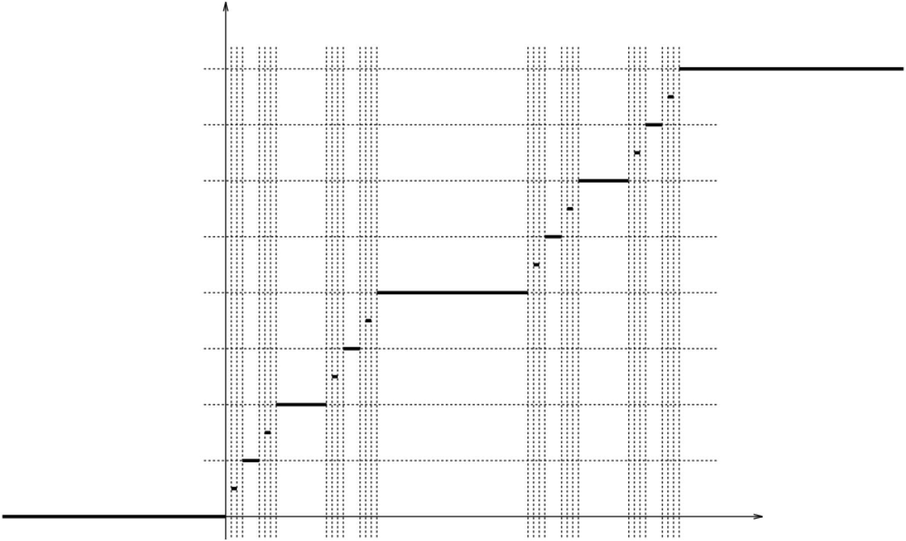
2. Ist F eine Stammfunktion zu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

oder: $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$

Cantorsche Treppenfunktion

Cantorsche Treppenfunktion



Absolut stetige Funktionen

Absolut stetige Funktionen

Definition

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, falls $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$,

Absolut stetige Funktionen

Definition

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, falls $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0$, sodass für alle Punkte

$$a \leq a_1 < b_1 \leq ..., \leq a_n < b_n \leq b \text{ mit } \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \text{ gilt:}$$

Absolut stetige Funktionen

Definition

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, falls $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$, sodass für alle Punkte

$$a \leq a_1 < b_1 \leq ..., \leq a_n < b_n \leq b \text{ mit } \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \text{ gilt:}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

Absolut stetige Funktionen

Definition

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, falls $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0$, sodass für alle Punkte

$$a \leq a_1 < b_1 \leq ..., \leq a_n < b_n \leq b \text{ mit } \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \text{ gilt:}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

Negation

Absolut stetige Funktionen

Definition

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, falls $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$, sodass für alle Punkte

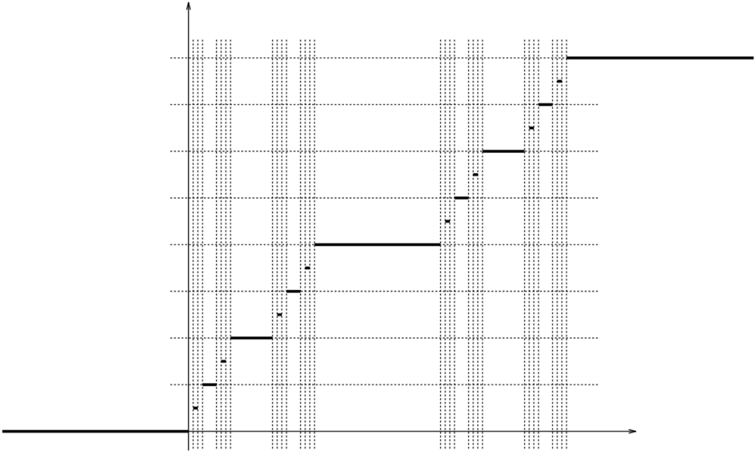
$$a \leq a_1 < b_1 \leq \ldots, \leq a_n < b_n \leq b \text{ mit } \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \text{ gilt:}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

Negation

$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\exists a \leq a_1 < \ldots, \leq b_n \leq b$ mit $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, aber $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \geq \varepsilon$.

Cantorsche Funktion (2)



$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

Grundlagen

Grundlagen

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mon. wachsend $\Rightarrow$ f f.ü. diffbar und

Grundlagen

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mon. wachsend $\Rightarrow$ f f.ü. diffbar und

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

Grundlagen

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mon. wachsend $\Rightarrow f$ f.ü. diffbar und

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

2. Variation:

$$\mathrm{Var} f = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : a = x_0 < \ldots < x_n = b, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Grundlagen

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mon. wachsend $\Rightarrow f$ f.ü. diffbar und

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

2. Variation:

$$\mathrm{Var} f = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : a = x_0 < ... < x_n = b, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$f \in BV \Leftrightarrow \mathrm{Var} f < \infty$. Jede BV-Funktion f lässt sich als Differenz monotoner Funktionen darstellen.

Grundlagen

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mon. wachsend $\Rightarrow f$ f.ü. diffbar und
$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$
2. Variation:
$$\mathrm{Var} f = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : a = x_0 < \ldots < x_n = b, n \in \mathbb{N} \right\}$$
$f \in BV \Leftrightarrow \mathrm{Var} f < \infty$. Jede BV-Funktion f lässt sich als Differenz monotoner Funktionen darstellen.
3. Jede BV-Funktion ist f.ü. diffbar

Grundlagen

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mon. wachsend $\Rightarrow f$ f.ü. diffbar und
$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$
2. Variation:
$$\mathrm{Var} f = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : a = x_0 < ... < x_n = b, n \in \mathbb{N} \right\}$$
$f \in BV \Leftrightarrow \mathrm{Var} f < \infty$. Jede BV-Funktion f lässt sich als Differenz monotoner Funktionen darstellen.
3. Jede BV-Funktion ist f.ü. diffbar
4. Jede abs. stetige Funktion ist BV

Hauptsatz für das Lebesgue-Integral

Hauptsatz für das Lebesgue-Integral

Satz

1. $f \in L^1([a,b])$, dann gilt für die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, (a \leq x \leq b):$$

Hauptsatz für das Lebesgue-Integral

Satz

1. $f \in L^1([a,b])$, dann gilt für die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, (a \leq x \leq b) :$$

F ist absolut stetig und $F' = f$ f.ü.

Hauptsatz für das Lebesgue-Integral

Satz

1. $f \in L^1([a,b])$, dann gilt für die Integralfunktion
$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, (a \leq x \leq b):$$
F ist absolut stetig und $F' = f$ f.ü.
2. Wenn $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, $F'(x) := 0$ an allen Nicht-Diffbarkeitstellen,

Hauptsatz für das Lebesgue-Integral

Satz

1. $f \in L^1([a,b])$, dann gilt für die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, (a \leq x \leq b):$$

   F ist absolut stetig und $F' = f$ f.ü.

2. Wenn $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, $F'(x) := 0$ an allen Nicht-Diffbarkeitstellen, dann ist F' Lebesgue-integrierbar und

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$$

Beweisschritte HDI

Beweisschritte HDI

Teil (1)

Beweisschritte HDI

Teil (1)

- F absolut stetig und f.ü. diffbar

Beweisschritte HDI

Teil (1)

- F absolut stetig und f.ü. diffbar
- Fall 1: beschränkte Funktionen:

Beweisschritte HDI

Teil (1)

- F absolut stetig und f.ü. diffbar
- Fall 1: beschränkte Funktionen:
  - Definiere f_n mit $f_n \to F'$ (Differenzenquotienten).

Beweisschritte HDI

Teil (1)

- F absolut stetig und f.ü. diffbar
- Fall 1: beschränkte Funktionen:
  - Definiere f_n mit $f_n \to F'$ (Differenzenquotienten).
  - Zeige, dass $\int_a^c F' dt = \int_a^c f\, dt$ und folgere $f = F'$ f.ü.

Beweisschritte HDI

Teil (1)

- F absolut stetig und f.ü. diffbar
- Fall 1: beschränkte Funktionen:
  - Definiere f_n mit $f_n \to F'$ (Differenzenquotienten).
  - Zeige, dass $\int_a^c F' dt = \int_a^c f\, dt$ und folgere $f = F'$ f.ü.
- Fall 2: nicht beschränkte Funktionen:

Beweisschritte HDI

Teil (1)

- F absolut stetig und f.ü. diffbar
- Fall 1: beschränkte Funktionen:
  - Definiere f_n mit $f_n \to F'$ (Differenzenquotienten).
  - Zeige, dass $\int_a^c F' dt = \int_a^c f\, dt$ und folgere $f = F'$ f.ü.
- Fall 2: nicht beschränkte Funktionen:
  Approximation durch beschränkte Funktionen

Beweisschritte HDI

Teil (1)

- F absolut stetig und f.ü. diffbar
- Fall 1: beschränkte Funktionen:
  - Definiere f_n mit $f_n \to F'$ (Differenzenquotienten).
  - Zeige, dass $\int_a^c F' dt = \int_a^c f\, dt$ und folgere $f = F'$ f.ü.
- Fall 2: nicht beschränkte Funktionen:
  Approximation durch beschränkte Funktionen

Hilfssatz

Wann sind absolut stetige Funktionen konstant?

Beweisschritte HDI

Teil (1)

- F absolut stetig und f.ü. diffbar
- Fall 1: beschränkte Funktionen:
  - Definiere f_n mit $f_n \to F'$ (Differenzenquotienten).
  - Zeige, dass $\int_a^c F' dt = \int_a^c f\, dt$ und folgere $f = F'$ f.ü.
- Fall 2: nicht beschränkte Funktionen:
  Approximation durch beschränkte Funktionen

Hilfssatz

Wann sind absolut stetige Funktionen konstant?

Teil (2)

Beweisschritte HDI

Teil (1)

- F absolut stetig und f.ü. diffbar
- Fall 1: beschränkte Funktionen:
  - Definiere f_n mit $f_n \to F'$ (Differenzenquotienten).
  - Zeige, dass $\int_a^c F' dt = \int_a^c f\, dt$ und folgere $f = F'$ f.ü.
- Fall 2: nicht beschränkte Funktionen:
  Approximation durch beschränkte Funktionen

Hilfssatz

Wann sind absolut stetige Funktionen konstant?

Teil (2)

- Zeige, dass F' intbar ist,

Beweisschritte HDI

Teil (1)

- F absolut stetig und f.ü. diffbar
- Fall 1: beschränkte Funktionen:
  - Definiere f_n mit $f_n \to F'$ (Differenzenquotienten).
  - Zeige, dass $\int_a^c F' dt = \int_a^c f\, dt$ und folgere $f = F'$ f.ü.
- Fall 2: nicht beschränkte Funktionen:
  Approximation durch beschränkte Funktionen

Hilfssatz

Wann sind absolut stetige Funktionen konstant?

Teil (2)

- Zeige, dass F' intbar ist,
- def. G(x) als Integralfunktion von F', aus (1) folgt, dass $G' = F'$

Beweisschritte HDI

Teil (1)

- F absolut stetig und f.ü. diffbar
- Fall 1: beschränkte Funktionen:
  - Definiere f_n mit $f_n \to F'$ (Differenzenquotienten).
  - Zeige, dass $\int_a^c F'dt = \int_a^c f\,dt$ und folgere $f = F'$ f.ü.
- Fall 2: nicht beschränkte Funktionen:
  Approximation durch beschränkte Funktionen

Hilfssatz

Wann sind absolut stetige Funktionen konstant?

Teil (2)

- Zeige, dass F' intbar ist,
- def. G(x) als Integralfunktion von F', aus (1) folgt, dass $G' = F'$
- Folgere daraus $G = F$ und damit die Beh.

HDI, Teil (1)

HDI, Teil (1)

Grundsätzliches

$\int_c^d f(t)dt = F(d) - F(c)$

HDI, Teil (1)

Grundsätzliches

$\int_c^d f(t)dt = F(d) - F(c)$

F ist abs. stetig

HDI, Teil (1)

Grundsätzliches

$\int_c^d f(t)dt = F(d) - F(c)$

F ist abs. stetig

Man weiß:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall A \ \text{ mit } \ \lambda(A) < \delta : \quad \int_A f \ d\lambda < \varepsilon$$

HDI, Teil (1)

Grundsätzliches

$\int_c^d f(t)dt = F(d) - F(c)$

F ist abs. stetig

Man weiß:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall A \ \text{ mit } \ \lambda(A) < \delta : \quad \int_A f \ d\lambda < \varepsilon$$

Wähle $A = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$ mit $\lambda(A) < \delta$:

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \int_A f \ d\lambda < \varepsilon$$

HDI, Teil (1)

Grundsätzliches

$\int_c^d f(t)dt = F(d) - F(c)$

F ist abs. stetig

Man weiß:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall A \ \text{ mit } \ \lambda(A) < \delta : \quad \int_A f \ d\lambda < \varepsilon$$

Wähle $A = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k]$ mit $\lambda(A) < \delta$:

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| = \int_A f \ d\lambda < \varepsilon$$

Also: F abs. stetig $\Rightarrow$ F hat BV $\Rightarrow$ f.ü. diffbar.

HDI, Teil (1), beschränktes f

HDI, Teil (1), beschränktes f

f_n als Differenzenquotienten

HDI, Teil (1), beschränktes f

f_n als Differenzenquotienten

$$f_n(x) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n} = n \cdot (F(x + 1/n) - F(x))$$

HDI, Teil (1), beschränktes f

f_n als Differenzenquotienten

$$f_n(x) = \frac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n} = n \cdot (F(x+1/n) - F(x))$$

$$f_n(x) = n \int_x^{x+1/n} f(t)dt$$

HDI, Teil (1), beschränktes f

f_n als Differenzenquotienten

$$f_n(x) = \frac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n} = n \cdot (F(x+1/n) - F(x))$$

$$f_n(x) = n \int_x^{x+1/n} f(t)dt$$

$$f_n(x) \longrightarrow F'(x) \ (n \to \infty) \text{ f.ü}$$

HDI, Teil (1), beschränktes f

HDI, Teil (1), beschränktes f

Rechnung...

HDI, Teil (1), beschränktes f

Rechnung...

$$\int_a^c F'(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n(x)dx =$$

HDI, Teil (1), beschränktes f

Rechnung...

$$\begin{aligned}\int_a^c F'(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^c f_n(x)dx = \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^c n\left(F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)\right)dx =\end{aligned}$$

HDI, Teil (1), beschränktes f

Rechnung...

$$\int_a^c F'(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n(x)dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^c n\left(F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)\right) dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(n\int_c^{c+1/n} F(x) - n\int_a^{a+1/n} F(x)\right) dx =$$

HDI, Teil (1), beschränktes f

Rechnung...

$$
\begin{aligned}
\int_a^c F'(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n(x)dx = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^c n\left(F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)\right)dx = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n\int_c^{c+1/n} F(x) - n\int_a^{a+1/n} F(x)\right)dx = \\
&= F(c) - F(a)
\end{aligned}
$$

HDI, Teil (1), beschränktes f

Rechnung...

$$
\begin{aligned}
\int_a^c F'(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n(x)dx = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^c n\left(F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)\right) dx = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n\int_c^{c+1/n} F(x) - n\int_a^{a+1/n} F(x)\right) dx = \\
&= F(c) - F(a) \overset{Def}{=} \int_a^c f(x)dx
\end{aligned}
$$

HDI, Teil (1), beschränktes f

Rechnung...

$$\begin{aligned}
\int_a^c F'(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n(x)dx = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^c n\left(F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)\right) dx = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n\int_c^{c+1/n} F(x) - n\int_a^{a+1/n} F(x)\right) dx = \\
&= F(c) - F(a) \overset{Def}{=} \int_a^c f(x)dx
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_a^c [F'(x) - f(x)]dx = 0 \quad \Rightarrow \quad F' = f$ (Grundlagen).

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Definitionen

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Definitionen

oBdA: $f \geq 0$,

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Definitionen

oBdA: $f \geq 0$,
Def. $g_n := \min(n, f)$, d.h. $g_n \to f$ f.ü.

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Definitionen

oBdA: $f \geq 0$,
Def. $g_n := \min(n, f)$, d.h. $g_n \to f$ f.ü.

$$F_n(x) := \int_a^x g_n(t)dt, \quad G_n(x) := \int_a^x (f(t) - g_n(t))dt$$

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Definitionen

oBdA: $f \geq 0$,
Def. $g_n := \min(n, f)$, d.h. $g_n \to f$ f.ü.

$$F_n(x) := \int_a^x g_n(t)dt, \quad G_n(x) := \int_a^x (f(t) - g_n(t))dt$$

Folgerungen

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Definitionen

oBdA: $f \geq 0$,
Def. $g_n := \min(n, f)$, d.h. $g_n \to f$ f.ü.

$$F_n(x) := \int_a^x g_n(t)dt, \quad G_n(x) := \int_a^x (f(t) - g_n(t))dt$$

Folgerungen

g_n sind beschränkt $\Rightarrow F_n' = g_n$ f.ü.

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Definitionen

oBdA: $f \geq 0$,
Def. $g_n := \min(n, f)$, d.h. $g_n \to f$ f.ü.

$$F_n(x) := \int_a^x g_n(t)dt, \quad G_n(x) := \int_a^x (f(t) - g_n(t))dt$$

Folgerungen

g_n sind beschränkt $\Rightarrow F_n' = g_n$ f.ü.
$G_n(x) = \int_a^x (\underbrace{f(t) - g_n(t)}_{\geq 0})dt$ ist wachsend, also f.ü. diffbar mit $G_n' \geq 0$.

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Definitionen

oBdA: $f \geq 0$,
Def. $g_n := \min(n, f)$, d.h. $g_n \to f$ f.ü.

$$F_n(x) := \int_a^x g_n(t)dt, \quad G_n(x) := \int_a^x (f(t) - g_n(t))dt$$

Folgerungen

g_n sind beschränkt $\Rightarrow F_n' = g_n$ f.ü.
$G_n(x) = \int_a^x (\underbrace{f(t) - g_n(t)}_{\geq 0})dt$ ist wachsend, also f.ü. diffbar mit $G_n' \geq 0$.
$F' = F_n' + G_n' \geq g_n + 0$ f.ü.

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Definitionen

oBdA: $f \geq 0$,
Def. $g_n := \min(n, f)$, d.h. $g_n \to f$ f.ü.

$$F_n(x) := \int_a^x g_n(t)dt, \quad G_n(x) := \int_a^x (f(t) - g_n(t))dt$$

Folgerungen

g_n sind beschränkt $\Rightarrow F_n' = g_n$ f.ü.
$G_n(x) = \int_a^x (\underbrace{f(t) - g_n(t)}_{\geq 0})dt$ ist wachsend, also f.ü. diffbar mit $G_n' \geq 0$.
$F' = F_n' + G_n' \geq g_n + 0$ f.ü.
$g_n \longrightarrow f$ f.ü. $(n \to \infty) \Rightarrow F' \geq f$.

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Folgerungen

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Folgerungen

$$\int_a^b F'(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Folgerungen

$$\int_a^b F'(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

F wachsend $\Rightarrow$ $\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a).$

HDI, Teil (1), unbeschränkter Fall

Folgerungen

$$\int_a^b F'(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

F wachsend $\Rightarrow \quad \int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a)$.

Damit: $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) \stackrel{Def}{=} \int_a^b f(x)dx, \Rightarrow F' = f$ f.ü.

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Satz

Jede absolut stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = 0$ λ-f.ü. ist konstant

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Satz

Jede absolut stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = 0$ λ-f.ü. ist konstant

Beweis (1)

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Satz

Jede absolut stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = 0$ λ-f.ü. ist konstant

Beweis (1)

- z.z. $F(a) = F(c)$ für ein bel. $c \in (a, b)$. Ziel: Schätze $|F(a) - F(c)|$ durch ε ab.

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Satz

Jede absolut stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = 0$ λ-f.ü. ist konstant

Beweis (1)

- z.z. $F(a) = F(c)$ für ein bel. $c \in (a, b)$. Ziel: Schätze $|F(a) - F(c)|$ durch ε ab.
- $\varepsilon > 0$ geg., wähle dazu δ aus der Def. der abs. Stetigkeit

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Satz

Jede absolut stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = 0$ λ-f.ü. ist konstant

Beweis (1)

- z.z. $F(a) = F(c)$ für ein bel. $c \in (a, b)$. Ziel: Schätze $|F(a) - F(c)|$ durch ε ab.
- $\varepsilon > 0$ geg., wähle dazu δ aus der Def. der abs. Stetigkeit
- $A := \{x \in [a, c) : F'(x) = 0\}$,

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Satz

Jede absolut stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = 0$ λ-f.ü. ist konstant

Beweis (1)

- z.z. $F(a) = F(c)$ für ein bel. $c \in (a, b)$. Ziel: Schätze $|F(a) - F(c)|$ durch ε ab.
- $\varepsilon > 0$ geg., wähle dazu δ aus der Def. der abs. Stetigkeit
- $A := \{x \in [a, c) : \ F'(x) = 0\}$, $N = [a, c) \setminus A$, $\eta(N) = 0$

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Satz

Jede absolut stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = 0$ λ-f.ü. ist konstant

Beweis (1)

- z.z. $F(a) = F(c)$ für ein bel. $c \in (a, b)$. Ziel: Schätze $|F(a) - F(c)|$ durch ε ab.
- $\varepsilon > 0$ geg., wähle dazu δ aus der Def. der abs. Stetigkeit
- $A := \{x \in [a, c) : F'(x) = 0\}$, $N = [a, c) \setminus A$, $\eta(N) = 0$
- $\forall\, x \in A\, \exists h : |F(x + h) - F(x)| < \varepsilon \cdot h$ (h beliebig klein).

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Satz

Jede absolut stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = 0$ λ-f.ü. ist konstant

Beweis (1)

- z.z. $F(a) = F(c)$ für ein bel. $c \in (a, b)$. Ziel: Schätze $|F(a) - F(c)|$ durch ε ab.
- $\varepsilon > 0$ geg., wähle dazu δ aus der Def. der abs. Stetigkeit
- $A := \{x \in [a, c) : F'(x) = 0\}$, $N = [a, c) \setminus A$, $\eta(N) = 0$
- $\forall\, x \in A\, \exists h : |F(x + h) - F(x)| < \varepsilon \cdot h$ (h beliebig klein).
- $\{[x, x + h] : x \in A, h \text{ klein genug}\}$ ist Vitali-Überdeckung von A

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Beweis (2)

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Beweis (2)

- $\exists [x_1, y_1], ..., [x_n, y_n]$ $(y_0 := a, x_{n+1} := c)$ mit
  $\delta > \eta(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} [x_k, y_k]) = \eta([a, c[\setminus \bigcup_{k=1}^{n} [x_k, y_k]) = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - y_k)$

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Beweis (2)

- $\exists [x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]$ $(y_0 := a, x_{n+1} := c)$ mit $\delta > \eta(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} [x_k, y_k]) = \eta([a, c[\setminus \bigcup_{k=1}^{n} [x_k, y_k]) = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - y_k)$
- Damit (abs. Stetigkeit): $\sum_{k=0}^{n} |F(x_{k+1}) - F(y_k)| < \varepsilon$

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Beweis (2)

- $\exists [x_1, y_1], ..., [x_n, y_n]$ $(y_0 := a, x_{n+1} := c)$ mit
  $\delta > \eta(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} [x_k, y_k]) = \eta([a, c[\setminus \bigcup_{k=1}^{n} [x_k, y_k]) = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - y_k)$
- Damit (abs. Stetigkeit): $\sum_{k=0}^{n} |F(x_{k+1}) - F(y_k)| < \varepsilon$
- Trick

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Beweis (2)

- $\exists [x_1, y_1], ..., [x_n, y_n]$ $(y_0 := a, x_{n+1} := c)$ mit $\delta > \eta(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} [x_k, y_k]) = \eta([a, c[\setminus \bigcup_{k=1}^{n} [x_k, y_k]) = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - y_k)$
- Damit (abs. Stetigkeit): $\sum_{k=0}^{n} |F(x_{k+1}) - F(y_k)| < \varepsilon$
- Trick

$$|F(c) - F(a)| =$$

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Beweis (2)

- $\exists [x_1, y_1], ..., [x_n, y_n]$ $(y_0 := a, x_{n+1} := c)$ mit $\delta > \eta(A \setminus \bigcup_{k=1}^n [x_k, y_k]) = \eta([a, c[\setminus \bigcup_{k=1}^n [x_k, y_k]) = \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - y_k)$
- Damit (abs. Stetigkeit): $\sum_{k=0}^n |F(x_{k+1}) - F(y_k)| < \varepsilon$
- Trick

$$|F(c) - F(a)| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} F(x_k) - \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - \left(\sum_{k=0}^{n} F(y_k) - \sum_{k=1}^{n} F(y_k) \right) \right| =$$

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Beweis (2)

- $\exists [x_1, y_1], ..., [x_n, y_n]$ $(y_0 := a, x_{n+1} := c)$ mit $\delta > \eta(A \setminus \bigcup_{k=1}^n [x_k, y_k]) = \eta([a, c[\setminus \bigcup_{k=1}^n [x_k, y_k]) = \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - y_k)$
- Damit (abs. Stetigkeit): $\sum_{k=0}^n |F(x_{k+1}) - F(y_k)| < \varepsilon$
- Trick

$$
\begin{aligned}
|F(c) - F(a)| &= \left| \sum_{k=1}^{n+1} F(x_k) - \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - \left(\sum_{k=0}^{n} F(y_k) - \sum_{k=1}^{n} F(y_k) \right) \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} (F(x_{k+1}) - F(y_k)) + \sum_{k=1}^{n} (F(y_k) - F(x_k)) \right| <
\end{aligned}
$$

Eigenschaft absolut stetiger Funktionen

Beweis (2)

- $\exists [x_1, y_1], ..., [x_n, y_n]$ $(y_0 := a, x_{n+1} := c)$ mit $\delta > \eta(A \setminus \bigcup_{k=1}^n [x_k, y_k]) = \eta([a, c[\setminus \bigcup_{k=1}^n [x_k, y_k]) = \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - y_k)$
- Damit (abs. Stetigkeit): $\sum_{k=0}^n |F(x_{k+1}) - F(y_k)| < \varepsilon$
- Trick

$$|F(c) - F(a)| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} F(x_k) - \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - \left(\sum_{k=0}^{n} F(y_k) - \sum_{k=1}^{n} F(y_k) \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} (F(x_{k+1}) - F(y_k)) + \sum_{k=1}^{n} (F(y_k) - F(x_k)) \right| <$$

$$< \left| \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \cdot (y_k - x_k) \right| < \varepsilon \cdot (c - a + 1)$$

HDI, Teil (2)

HDI, Teil (2)

Vorgehen

HDI, Teil (2)

Vorgehen

F abs. stetig $\Rightarrow F$ ist BV $\Rightarrow F$ Linearkombination monotoner Funktionen, deren Ableitungen intbar sind, also auch F'.

HDI, Teil (2)

Vorgehen

F abs. stetig $\Rightarrow$ F ist BV $\Rightarrow$ F Linearkombination monotoner Funktionen, deren Ableitungen intbar sind, also auch F'.
$G(x) := \int_a^x F'(x)dx$, nach Teil (1) ist G abs. stetig und $G' = F'$ f.ü.

HDI, Teil (2)

Vorgehen

F abs. stetig $\Rightarrow$ F ist BV $\Rightarrow$ F Linearkombination monotoner Funktionen, deren Ableitungen intbar sind, also auch F'.
$G(x) := \int_a^x F'(x)dx$, nach Teil (1) ist G abs. stetig und $G' = F'$ f.ü.
$G - F$ abs. stetig mit $(G - F)' = 0$ f.ü., also nach Satz konstant

HDI, Teil (2)

Vorgehen

F abs. stetig $\Rightarrow F$ ist BV $\Rightarrow F$ Linearkombination monotoner Funktionen, deren Ableitungen intbar sind, also auch F'.
$G(x) := \int_a^x F'(x)dx$, nach Teil (1) ist G abs. stetig und $G' = F'$ f.ü.
$G - F$ abs. stetig mit $(G - F)' = 0$ f.ü., also nach Satz konstant
$G = F \Rightarrow$ Beh.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Soli deo gloria!