

DER DUALRAUM VON $C(K)$

MICHAEL SCHELLING

1. EINLEITUNG

In dieser Arbeit werden wir uns die Elemente des *Dualraum* der stetigen Funktionen über einem Kompaktum K beschreiben. Wir wollen also stetige, lineare Funktionale T betrachten, die auf stetigen Funktionen operieren. Solche Funktionale sind zum Beispiel Funktionsauswertungen oder Integralbildungen. Wir werden sehen, dass solche konkreten Beispiele für Funktionale stets der Integration über ein *signiertes Borelmaß* entsprechen, und naturgemäß stellen wir uns die Frage ob sich diese Aussage auf ein beliebiges stetiges, lineares Funktional übertragen lässt. Das bedeutet, wir klären damit auch die Frage ob es stetige, lineare Funktionale gibt die einem völlig anderem Typ entsprechen als alle stetigen, linearen Funktionale mit denen wir uns bereits beschäftigt haben. Diese Fragestellung ist selbst im eindimensionalen Fall auf einem kompakten Intervall nicht trivial. Für diese vereinfachte Form unseres Problems zeigte F. Riesz bereits im Jahre 1909, dass es keine stetigen, linearen Funktionale geben kann, die keiner Integration entsprechen. Das Resultat im allgemeinen Fall wird in Anlehnung an diese Arbeit der *Rieszsche Darstellungssatz* genannt.

Bevor wir beginnen sei zuerst festgehalten, dass wir endliche (signierte) Borelmaße μ betrachten und jede stetige Funktion f auf einem Kompaktum K beschränkt ist. Demzufolge ist jede stetige Funktion über einem Kompaktum bezüglich eines beliebigen (signierten) Borelmaßes integrierbar, weshalb wir im Folgenden die Existenz der Integrale stillschweigend voraussetzen können.

Zunächst werden wir einige grundlegende Eigenschaften von stetigen, linearen Funktionalen und Maßen ansehen, auf die in dieser Arbeit zurückgegriffen wird. Anschließend wenden wir uns der Konstruktion eines (signierten) Maßes zu einem gegebenen stetigen, linearen Funktional zu. Dabei werden wir zwei wichtige Approximationseigenschaften zeigen, die den Übergang zwischen dem Raum der Maße und dem der Funktionale erlauben werden. Abschließend zeigen wir, dass ein stetiges, lineares Funktional gerade der Integration über unser konstruiertes Maß entspricht.

Als wichtiges Resultat haben wir den Dualraum der stetigen Funktionen über einem Kompaktum damit vollständig charakterisiert und können ihn von nun an explizit angeben. Solche Darstellungen können das Arbeiten mit Dualräumen vereinfachen, weshalb es wünschenswert ist entsprechende Darstellungen für möglichst viele Dualräume zu finden.

2. DEFINITIONEN

In diesem Abschnitt werden die für das anschließende Vorgehen wichtigen Begriffe definiert sowie einige Eigenschaften formuliert. Auf Beweise werden wir in diesem Abschnitt verzichtet.

Definition 2.1. Für einen kompakten topologischen Raum K definieren wir den normierten Raum der stetigen Funktionen über K als

$$C(K) := \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}$$

Bemerkung 2.2. Offenbar ist $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Vektorraum.

Definition 2.3. Zu einem normierten Vektorraum V definieren wir den Dualraum V' als den Raum der linearen, stetigen Funktionale von V in die reellen Zahlen.

$$V' := \{T : V \rightarrow \mathbb{R} \mid T \text{ linear und stetig}\}$$

Definition 2.4. Sei $T \in C(K)'$ ein stetiges, lineares Funktional. Wir nennen T *positiv*, wenn T für alle nichtnegativen Funktionen nichtnegative Werte in \mathbb{R} annimmt, d.h.

$$f(x) \geq 0 \forall x \in K \Rightarrow T(f) \geq 0$$

Lemma 2.5. Sei $T \in C(K)'$ ein stetiges, lineares Funktional, dann existieren positive, stetige, lineare Funktionale T_+ und T_- , sodass die Gleichung

$$T = T_+ - T_-$$

auf ganz $C(K)$ erfüllt ist.

Bemerkung 2.6. Das vorangehende Lemma erlaubt es uns im weiteren Vorgehen auf positive, stetige, lineare Funktionale zu beschränken.

Definition 2.7. Sei Σ eine σ -Algebra über einem Raum Ω . Eine Abbildung $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ heißt endliches signiertes Maß, wenn sie σ -additiv ist, d.h.

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \quad \forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$$

(Man beachte, dass keine Positivität des Maßes gefordert wird)

Satz 2.8 (Hahn-Jordan-Zerlegung). Sei Σ eine σ -Algebra und μ ein signiertes Maß. Dann existieren endliche positive Maße μ_+ und μ_- , die

$$\mu = \mu_+ - \mu_-$$

erfüllen.

Definition 2.9. Sei Σ eine σ -Algebra über einen Raum Ω , wobei Σ die Borelmengen aus Ω enthalte. Wir nennen ein (signiertes) Maß auf Σ *regulär* wenn μ die folgenden Regularitätsbedingungen für alle Mengen A aus Σ erfüllt:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(L) \mid L \subset A, L \in \Sigma \text{ kompakt}\} \\ \mu(A) &= \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \in \Sigma \text{ offen}\} \end{aligned}$$

Bemerkung 2.10. (i) Die beiden Regularitätsbedingungen erlauben, es sich bei der Betrachtung des Maßes auf kompakte bzw. offene Menge zurückzuziehen.

(ii) Auf einem kompakten metrischen Raum sind alle endlichen Borelmaße regulär.

(iii) Das Lebesquemaß auf \mathbb{R}^n ist ein Beispiel für ein nicht-endliches reguläres Maß.

3. KONSTRUKTION EINES MASSES AUF EINEM KOMPAKTUM

Im Folgenden sei nun K stets ein kompakter topologischer Raum. Zur besseren Vorstellung des Dualraumes $C(K)'$ betrachten wir zunächst einige Beispiele für stetige, lineare Funktionale.

Beispiel 3.1. (i) Sei $a \in K$ ein beliebiges Element aus K , so liegt die Abbildung T_1 , definiert durch

$$T_1 : C(K) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto T_1(f) := f(a)$$

in $C(K)'$.

(ii) Sei $A \subset K$ eine Teilmenge von K und μ ein endliches Borelmaß über K . Dann ist die Abbildung T_2 , gegeben durch:

$$T_2(f) := \int_A f d\mu$$

offenbar linear und wegen $|T_2(f)| \leq \mu(A) \|f\|_\infty$ stetig und somit ein Element aus $C(K)'$.

Man sieht schnell ein, dass das obige Funktional T_1 sich ebenfalls als Integral schreiben lässt, wobei man als Maß μ gerade das *Punktmaß* in $a \in K$ wählt. Wir klären nun, ob sich jedes stetige, lineare Funktional über $C(K)$ als ein Integral mit geeignetem Maß μ schreiben lässt.

Dafür geben wir uns nun ein beliebiges positives, stetiges, lineares Funktional T aus $C(K)'$ vor.

Intuitiv würde man das gesuchte Maß μ über

$$(3.1) \quad \mu(A) = \int_K \mathbb{1}_A d\mu = T(\mathbb{1}_A) \quad A \in \mathfrak{B}(K)$$

erklären. Allerdings ist T für unstetige charakteristische Funktionen nicht wohldefiniert. Wir behelfen uns indem wir die charakteristische Funktion durch stetige Funktionen approximieren.

Wir setzen für kompakte Mengen L

$$(3.2) \quad \mu_*(L) := \inf\{T(f) \mid f \geq \mathbb{1}_L, f \in C(K)\}$$

Bemerkung 3.2. In der Definition (3.2) wollen wir, dass es eine Folge stetiger Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ über K gibt, die punktweise gegen die charakteristische Funktion konvergiert. Dies ist, unter der Forderung $f_n \geq \mathbb{1}_L$, nur für abgeschlossene L erfüllt, da sonst keine punktweise Konvergenz auf dem Rand von L vorliegt.

Aus dieser Definition folgt direkt, dass

$$(3.3) \quad 0 \leq \mu_*(L) < \infty$$

$$(3.4) \quad \mu_*(\emptyset) = 0$$

und wir sehen, dass μ_* monoton wachsend ist, d.h.

$$(3.5) \quad \mu_*(L_1) \leq \mu_*(L_2) \quad \forall L_1 \subset L_2 \subset K \text{ kompakt}$$

Für beliebige $A \subset K$ setzen wir (gemäß den Regularitätsbedingungen)

$$(3.6) \quad \mu_*(A) := \sup\{\mu_*(L) \mid L \subset A, L \text{ kompakt}\}$$

Dies ist mit der Definition (3.2) von μ_* aufgrund der Monotonie (3.5) verträglich.

Bemerkung 3.3. Im Raum der Funktionen entspricht die Regularitätsbedingung gerade der Approximation der charakteristischen Funktion über einer beliebigen Menge A durch eine Folge von charakteristischen Funktionen über kompakte Teilmengen $L \subset A$. Man überlegt sich leicht, dass auch hier die punktweise Konvergenz erfüllt ist.

Die so definierte Abbildung μ_* operiert auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(K)$. Um nun aus μ_* ein Borelmaß zu erzeugen werden wir auf folgendes Lemma zurückgreifen

Lemma 3.4 (Fortsetzungslemma). *Sei μ ein äußeres Maß über K , das die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

- (1) $\mu(L_1 \cup L_2) = \mu(L_1) + \mu(L_2) \quad \forall L_1, L_2 \subset K \text{ disjunkt}$
- (2) $\mu(U) = \sup\{\mu(L) \mid L \subset U, L \text{ kompakt}\} \quad \forall U \subset K \text{ offen}$
- (3) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \text{ offen}\} \quad \forall A \subset K$

Dann ist μ beschränkt auf $\mathfrak{P}(K)$ ein Maß.

(Ein Beweis findet sich z.B. in [Bau92, Lemma 26.5])

Bemerkung 3.5. Aussagen dieser Art werden für gewöhnlich Fortsetzungssätze genannt, die in der Regel auf den Fortsetzungssatz von Carathéodory (1873–1950) zurückgehen.

Wir zeigen nun zunächst die letzte Voraussetzung des Fortsetzungslemmas, welche gerade der zweiten Regularitätsbedingung entspricht. Wir setzen für $A \subset K$

$$(3.7) \quad \mu^*(A) := \inf\{\mu_*(U) \mid A \subset U, U \text{ offen}\}$$

Wir wollen nun die Voraussetzungen des Fortsetzungslemmas für μ^* beweisen. Man sieht mit der Definition (3.7) von μ^* sofort, dass für alle $A \subset K$

$$(3.8) \quad \mu_*(A) \leq \mu^*(A)$$

erfüllt ist, da offenbar $\mu_*(A) \leq \mu_*(U)$ für alle offenen Mengen $U \subset K$ mit $A \subset U$. Des Weiteren folgt aus der Definition (3.7) und der Monotonie (3.5), dass für alle offenen Mengen $U \subset K$

$$(3.9) \quad \mu_*(U) = \mu^*(U)$$

erfüllt ist. Wir zeigen nun, dass die Abbildungen μ_* und μ^* auch auf kompakte Mengen L übereinstimmen, d.h.

$$(3.10) \quad \mu_*(L) = \mu^*(L)$$

Beweis. Wegen der Abschätzung (3.8) reicht es $\mu_*(L) \geq \mu^*(L)$ zu zeigen.

Sei $\varepsilon \geq 0$ beliebig. Nach der Definition (3.2) von μ_* existiert ein stetiges $f \in C(K)$ mit $f \geq \mathbb{1}_L$, sodass

$$T(f) - \mu_*(L) < \varepsilon$$

gilt. Wir wählen uns nun eine offene Menge $U_a \supset L$ durch

$$U_a = \{x \in K \mid f(x) > a\}$$

für ein beliebiges $0 < a < 1$. Diese offene Menge U_a erfüllt die Eigenschaft

$$\mathbb{1}_{U_a} \leq \frac{1}{a} f$$

Somit gilt auch für alle kompakten Teilmengen $L_a \subset U_a$

$$\mathbb{1}_{L_a} \leq \mathbb{1}_{U_a} \leq \frac{1}{a} f$$

und wir erhalten unter Anwendung der Definition (3.2) von μ_* die Ungleichung

$$\mu_*(L_a) \leq \frac{1}{a}T(f)$$

Da L_a eine beliebige kompakte Teilmenge von U_a war folgt mit der Regularitätseigenschaft (3.6) die Ungleichung

$$\mu_*(U_a) \leq \frac{1}{a}T(f)$$

Wir erhalten insgesamt also die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu_*(U_a) - \mu_*(L) &\leq \frac{1}{a}T(f) - \mu_*(L) \\ &\leq \frac{1}{a}(\mu_*(L) + \varepsilon) - \mu_*(L) \\ &= \left(\frac{1}{a} - 1\right)\mu_*(L) + \frac{\varepsilon}{a} \xrightarrow{a \rightarrow 1} \varepsilon \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit der Regularitätseigenschaft (3.7) von μ^* und $\varepsilon \rightarrow 0$ die Behauptung. \square

Wir prüfen nun die σ -Subadditivität welche aussagt, dass für eine Folge von Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K die Abschätzung

$$(3.11) \quad \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

erfüllt ist.

Wir werden den Beweis in drei Schritten führen. Zuerst betrachten wir zwei kompakte Mengen L_1 und L_2 , anschließend zeigen wir die Aussage für endlich viele offene Mengen U_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und im letzten Schritt erweitern wir die Aussage auf beliebige Folgen von Mengen in K .

Beweis. (i) Seien $L_1, L_2 \subset K$ kompakte Teilmengen von K und $f_1, f_2 \in C(K)$ stetige Funktionen mit

$$f_1 \geq \mathbb{1}_{L_1} \quad f_2 \geq \mathbb{1}_{L_2}$$

Wir erhalten damit folgende Ungleichung

$$f_1 + f_2 \geq \mathbb{1}_{L_1 \cup L_2}$$

Aus der Definition (3.2) von μ_* und der Gleichung (3.10) folgt nun

$$\mu^*(L_1 \cup L_2) = \mu_*(L_1 \cup L_2) \leq T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$$

und weil f_1, f_2 beliebig waren

$$\mu^*(L_1 \cup L_2) \leq \mu_*(L_1) + \mu_*(L_2) = \mu^*(L_1) + \mu^*(L_2)$$

wobei wieder auf die Definition (3.2) von μ_* und die Gleichung (3.10) zurückgegriffen wurde.

(ii) Sei zunächst $n = 2$, U_1, U_2 offene Mengen in K und $L_1 \subset U_1$ sowie $L_2 \subset U_2$ beliebige kompakte Teilmengen. Aus dem ersten Schritt des Beweises und der Monotonie (3.5) von μ_* folgt unter Zuhilfenahme der Gleichungen (3.9) und (3.10) die Ungleichung

$$\mu^*(L_1 \cup L_2) \leq \mu^*(L_1) + \mu^*(L_2) \leq \mu_*(U_1) + \mu_*(U_2)$$

Da $L_1 \cup L_2 \subset U_1 \cup U_2$ liefert die Definition (3.7) von μ^* die Aussage für $n = 2$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig und U_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ eine endliche Folge von offenen Mengen in K .

Wir betrachten für alle i beliebige kompakte Teilmengen L_i von U_i . Per Induktion zeigt man nun die Aussage

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mu^*(U_i)$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, indem man auf die Zerlegung $U'_1 = \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$ und $U'_2 = U_n$ den Fall $n = 2$ anwendet.

(iii) Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in K und $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei U_i eine offene Überdeckung von A_i derart, dass

$$\mu^*(U_i) - \mu^*(A_i) < 2^{-i} \cdot \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Seien weiterhin die Mengen A und U wie folgt definiert

$$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \quad \text{und} \quad A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Ist nun L eine kompakte Teilmenge von U , dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$L \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$$

gilt. Aus Schritt (ii) des Beweises und der Gleichung (3.10) folgt nun

$$\mu_*(L) \leq \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^k U_i \right) \leq \sum_{i=1}^k \mu^*(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon$$

Da L eine beliebige kompakte Teilmenge von U war erhalten wir mit der Monotonie (3.5), den Gleichungen (3.9), (3.10) und $A \subset U$ die Abschätzung

$$\mu^*(A) \leq \mu_*(U) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon$$

Und mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt nun die Behauptung. \square

Nun bleibt noch die erste Voraussetzung des Fortsetzungslemmas zu verifizieren, welche die σ -Subadditivität verschärft.

Wir beweisen folgende Gleichung für kompakte, disjunkte Teilmengen L_1, L_2 von K

$$\mu(L_1 \cup L_2) = \mu(L_1) + \mu(L_2)$$

Beweis. Seien $L_1, L_2 \in K$ kompakt und disjunkt. Wir haben im ersten Schritt des Beweises der σ -Subadditivität bereits

$$\mu^*(L_1 \cup L_2) \leq \mu_*(L_1) + \mu_*(L_2) = \mu^*(L_1) + \mu^*(L_2)$$

gesehen. Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Seien hierzu $f \in C(K)$ mit

$$f \geq \mathbb{1}_{L_1 \cup L_2} = \mathbb{1}_{L_1} + \mathbb{1}_{L_2}$$

und $g \in C(K)$ mit $g|_{L_1} \equiv 1$ und $g|_{L_2} \equiv 0$ gegeben. Ein solches stetiges g existiert da L_1 und L_2 disjunkt sind nach dem Satz von Urysohn. (siehe z.B. [Bau92, Korollar 27.3]) Es sind $f \cdot g$ und $f(1 - g)$ stetige Funktionen die folgende Eigenschaften erfüllen

$$\begin{aligned} f \cdot g &\geq \mathbb{1}_{L_1} \\ f(1 - g) &\geq \mathbb{1}_{L_2} \end{aligned}$$

Mit der Definition (3.2) von μ_* und der Linearität von T gilt demnach die Ungleichung

$$\mu_*(L_1) + \mu_*(L_2) \leq T(f \cdot g) + T(f(1 - g)) = T(f)$$

Mit der Definition (3.2) von μ_* und der Gleichung (3.10) folgt die Abschätzung

$$\mu^*(L_1) + \mu^*(L_2) \leq \mu^*(L_1 \cup L_2)$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. \square

Die Abbildung μ^* erfüllt also alle Voraussetzungen um das Fortsetzungslemmas anzuwenden.

Korollar 3.6. *Die durch (3.7) definierte Abbildung μ^* ist auf $\mathfrak{B}(K)$ ein Maß. Wir definieren*

$$(3.12) \quad \mu := \mu^*|_{\mathfrak{B}(K)}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass μ^* ein äußeres Maß ist, d.h. μ^* ist monoton und σ -subadditiv. Die σ -Subadditivität wurde bereits gezeigt.

Seien nun also $A \subset B \subset K$, dann folgt aus der Definition (3.7) von μ^* und der Monotonieeigenschaft (3.5) direkt die Monotonie von μ^* :

$$0 \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

Die Voraussetzung (1) von Lemma 3.2 wurde bereits gezeigt. Die Bedingung (2) folgt aus der Gleichung (3.9) und der Regularitätseigenschaft (3.6) und (3) aus der Definition von μ^* in (3.7). Wir können also Lemma 3.2 auf μ^* anwenden und erhalten ein Borelmaß μ . \square

Bemerkung 3.7. Das so erzeugte Borelmaß μ ging aus μ^* und nicht aus μ_* hervor. Allerdings folgt mit der Gleichung (3.10), dass die für uns relevante Eigenschaft (3.2) für die Abbildung μ^* und damit auch für das Borelmaß μ erhalten bleibt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts zeigen wir noch folgendes Lemma, welches Aufschluss darüber gibt, was passiert wenn man die charakteristischen Funktionen von unten anstatt von oben annähert. Dies führt zu der alternativen Definition

$$\mu_*(U) := \sup\{T(f) \mid 0 \leq f \leq \mathbf{1}_U, f \in C(K)\}$$

wobei U eine beliebige offene Teilmenge von K ist.

Lemma 3.8. *Jede offene Borelmenge $U \in \mathfrak{B}(K)$ erfüllt*

$$(3.13) \quad \mu(U) = \sup\{T(f) \mid 0 \leq f \leq \mathbf{1}_U, f \in C(K)\}$$

Beweis. Sei U eine offene, Borel-messbare Teilmenge von K . Wir definieren $c \in \mathbb{R}$ durch

$$c_U := \sup\{T(f) \mid 0 \leq f \leq \mathbf{1}_U, f \in C(K)\}$$

(i) Sei L eine kompakte, Borel-messbare Teilmenge von U . Es existiert eine stetige Funktion $f \in C(K)$, sodass die Abschätzung

$$\mathbf{1}_L \leq f \leq \mathbf{1}_U$$

erfüllt ist. Insbesondere nimmt f also auf L konstant den Wert 1 an. Da μ die Eigenschaft (3.2) erfüllt erhalten wir folgende Ungleichung

$$\mu(L) \leq T(f) \leq c_U$$

und mit der Regularitätseigenschaft (3.6) und der Gleichung (3.10) gilt dementsprechend für die Menge U die Ungleichung

$$\mu(U) \leq c_U$$

(ii) Sei nun f eine nichtnegative, stetige Funktion auf K , sodass $f \leq \mathbf{1}_U$ erfüllt ist.

Sei $L := \overline{\{x \in K \mid f(x) > 0\}}$ der abgeschlossene Träger der Funktion f . Dann ist offenbar L eine Teilmenge von U .

Sei weiterhin eine stetige Funktion g mit der Eigenschaft $\mathbf{1}_L \leq g$ gegeben. Dann

gilt $g \geq f$ und somit auch $T(g) \geq T(f)$, wie man aus der Linearität und Positivität von T schließt. Mit der Eigenschaft (3.2) und $L \subset U$ ergibt sich die Ungleichung

$$T(f) \leq \mu(L) \leq \mu(U)$$

Da f eine beliebige stetige Funktion auf K mit $0 \leq f \leq \mathbb{1}_U$ war, gilt also auch die Abschätzung

$$c_U \leq \mu(U)$$

□

Bemerkung 3.9. Analog zu Bemerkung 3.2 fordern wir die Approximationseigenschaft (3.13) nur für offene Mengen U .

4. DER RIESZSCHE DARSTELLUNGSSATZ

Im vorangehenden Abschnitt haben wir gesehen wie man ausgehend von einem positiven, stetigen, linearen Funktional über $C(K)$ ein Borelmaß μ erzeugt, welches die Approximationseigenschaften (3.2) und (3.13) erfüllt. Mithilfe dieser Vorarbeit zeigen wir nun, dass sich ein solches Funktional T als Integral bezüglich des Borelmaßes μ darstellen lässt. Abschließend erweitern wir diese Aussage auf nicht-positive Funktionale, wobei wir in den Raum der signierten Maße wechseln werden.

Satz 4.1 (Rieszscher Darstellungssatz).

Sei K ein kompakter topologischer Raum. Jedes stetige, lineare Funktional T über $C(K)$ besitzt eine Darstellung in der Form

$$T(f) = \int_K f \, d\mu \quad \forall f \in C(K)$$

mit einem signierten Borelmaß μ .

Beweis. (i) Sei zunächst T ein positives, stetiges, lineares Funktional aus $C(K)'$ und f eine stetige, positive Funktion aus $C(K)$.

Da die Funktion f stetig ist nimmt sie auf der kompakten Menge K ihr Maximum S an.

Für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ betrachten wir eine Zerlegung $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n\}$ des Wertebereiches von f mit den folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = S \\ y_i - y_{i-1} < \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Wir definieren für $i \in \{1, \dots, n\}$ die kompakten Mengen K_i durch

$$K_i := \{x \in K \mid y_i \leq f(x)\}$$

sowie positive, stetige Funktionen f_i durch

$$f_i := (f - y_{i-1}) \cdot \mathbb{1}_{K_{i-1} \setminus K_i} + (y_i - y_{i-1}) \cdot \mathbb{1}_{K_i}$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$. Diese Funktionen sind eine Zerlegung von f , wie man wie folgt zeigt:

Ist x aus K mit $f(x) = 0$ dann ist auch $f_i(x) = 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sei nun also x aus K mit $f(x) > 0$, dann existiert ein eindeutiges j aus $\{1, \dots, n\}$ sodass

$y_{j-1} < f(x) \leq y_j$ erfüllt ist. Dann ist

$$\begin{aligned} f_i(x) &= y_i - y_{i-1} \quad \text{für jedes } i < j \\ f_j(x) &= f(x) - y_{j-1} \\ f_i(x) &= 0 \quad \text{für jedes } i > j \end{aligned}$$

Also ist die Summe der f_i gerade die Funktion f . Die Zerlegung von f erfüllt zudem folgende Eigenschaften:

$$(4.1) \quad 0 \leq f_i \leq (y_i - y_{i-1})$$

$$(4.2) \quad K_i \subset \{x \in K \mid f_i(x) = y_i - y_{i-1}\}$$

$$(4.3) \quad \{x \in K \mid f_i(x) > 0\} \subset K_{i-1}$$

welche für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gültig sind. Dies liefert folgende Abschätzung für jedes i aus $\{1, \dots, n\}$

$$(4.4) \quad (y_i - y_{i-1}) \cdot \mathbb{1}_{K_i} \leq f_i \leq (y_i - y_{i-1}) \cdot \mathbb{1}_{K_{i-1}}$$

Durch Integrieren über K bezüglich des Borelmaßes μ aus Abschnitt 3 erhalten wir für alle i aus $\{1, \dots, n\}$ die Abschätzung

$$(4.5) \quad (y_i - y_{i-1}) \cdot \mu(K_i) \leq \int_K f_i \, d\mu \leq (y_i - y_{i-1}) \cdot \mu(K_{i-1})$$

Nun zeigen wir, dass die obige Abschätzung (4.5) ihre Gültigkeit behält, wenn wir das Integral durch $T(f_i)$ ersetzen.

Die linke Ungleichung folgt direkt aus der linken Ungleichung von (4.4) mit der Eigenschaft (3.2).

Widmen wir uns also der rechten Ungleichung: Sei U eine offene Überdeckung von K_{i-1} . Die positive stetige Funktion $g := (y_i - y_{i-1})^{-1} f_i$ erfüllt nach (4.4) die Bedingung $g \leq \mathbb{1}_{K_{i-1}} \leq \mathbb{1}_U$. Somit folgt mit der Approximationseigenschaft (3.13) die Ungleichung $T(g) \leq \mu(U)$. Da U beliebig war, folgt mit der Regularitätseigenschaft (3.7) die rechte Seite der Ungleichung:

$$(4.6) \quad (y_i - y_{i-1}) \cdot \mu(K_i) \leq T(f_i) \leq (y_i - y_{i-1}) \cdot \mu(K_{i-1})$$

Um nun eine Aussage über $T(f)$ beziehungsweise $\int_K f \, d\mu$ treffen zu können summieren wir nun die obigen Ungleichungen über alle i aus $\{1, \dots, n\}$.

Damit liegen also $T(f)$ und $\int_K f \, d\mu$ zwischen

$$\sum_{i=1}^n \left((y_i - y_{i-1}) \cdot \mu(K_i) \right) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n \left((y_i - y_{i-1}) \cdot \mu(K_{i-1}) \right)$$

Wir schätzen den Abstand zwischen $T(f)$ und $\int_K f \, d\mu$ durch den Abstand der oberen und unteren Grenze für die beiden Werte ab und erhalten somit die Ungleichung

$$\left| \int_K f \, d\mu - T(f) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left((y_i - y_{i-1}) \mu(K_{i-1} \setminus K_i) \right)$$

Wegen der Eigenschaft

$$K_{i-1} \setminus K_i = \{x \in K \mid y_{i-1} \leq f < y_i\}$$

bilden die $K_{i-1} \setminus K_i$ eine Zerlegung von K , d.h.

$$\bigcup_{i=1}^n (K_{i-1} \setminus K_i) = K$$

ist erfüllt, da $y_0 = 0$ und $y_n = S$ gewählt wurden. Wir erhalten mit $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ also die Abschätzung

$$\left| \int_K f \, d\mu - T(f) \right| \leq \varepsilon \cdot \mu(K)$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war und $\mu(K) < \infty$ gilt, erhalten wir die gewünschte Gleichung

$$T(f) = \int_K f \, d\mu$$

(ii) Sei nun f eine beliebige stetige Funktion aus $C(K)$ und T ein positives Funktional über $C(K)$. Dann existieren positive stetige Funktionen f_+ und f_- mit

$f = f_+ - f_-$. Wir erhalten mit dem ersten Teil des Beweises und der Linearität die Gleichung

$$T(f) = T(f_+) - T(f_-) = \int_K f_+ d\mu - \int_K f_- d\mu = \int_K f d\mu$$

für das Borelmaß μ aus Abschnitt 3.

(iii) Sei nun die Funktion f beliebig aus $C(K)$ und das Funktional T beliebig aus $C(K)'$. Dann existieren nach Lemma 2.5 lineare, stetige, positive Funktionale T_+ und T_- , die die Gleichung $T = T_+ - T_-$ erfüllen. Mithilfe von Teil (i) und (ii) des Beweises folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} T(f) &= T_+(f) - T_-(f) = \int_K f d\mu_+ - \int_K f d\mu_- = \int_K f d(\mu_+ - \mu_-) \\ &= \int_K f d\mu \end{aligned}$$

wobei $\mu := \mu_+ - \mu_-$ ein signiertes Borelmaß ist und μ_+ , μ_- gerade die zu T_+ , T_- konstruierten Borelmaße aus Abschnitt 3 sind. \square

Wir haben nun also gezeigt, dass jedem stetigen, linearen Funktional T über dem Raum der stetigen Funktionen auf einem Kompaktum ein signiertes Borelmaß μ zugeordnet werden kann, sodass die Anwendung von T gerade der Integration bezüglich μ entspricht. Wir haben bereits bei der Konstruktion von μ gesehen, dass es gewisse Regularitätseigenschaften erfüllt, man kann nun weiter zeigen, dass μ sogar regulär ist.

Daraus lässt sich nun folgern, dass

$$C(K)' \cong M(K)$$

gilt, wobei $M(K)$ der Raum der signierten regulären Borelmaße ist. Hierzu zeigt man die Isometrie der Zuordnung $T \rightarrow \mu$ wofür man jedoch auf Argumente der Funktionalanalysis zurückgreifen muss.

LITERATUR

[Bau92] Heinz Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, second ed., de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook], Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992.