Der Dualraum von $C(K)$

Der Rieszsche Darstellungssatz

Michael Schelling

29. Juni 2012

Definition

K kompakter topologischer Raum,

$$C(K) := \{f : K \to \mathbb{R} |\ \text{f stetig}\}$$

$$||f||_\infty := \sup\{f(x) |\ x \in K\}$$

ist ein normierter Vektorraum

Definition

V normierter Vektorraum:

$$V' := \{T| \quad T : V \to \mathbb{R}\ \text{linear und stetig}\}$$

heißt *Dualraum*

Beispiel

Komponentenfunktionale im $V = \mathbb{R}^n$

$$T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T \to T_i(x) = x_i$$

Beispiel

für $T \in C(K)'$

- Funktionauswertungen

$$T_1(f) = f(a) \; \forall a \in K$$

- Integralbildungen mit μ Borelmaß auf K

$$T_2(f) = \int_A f \; d\mu \quad \forall A \in \mathfrak{B}(K)$$

Definition

(Ω, Σ) Messraum, $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ *signiertes Maß*, wenn
$\exists \mu_+, \mu_- : \Sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Maße:

$$\mu = \mu_+ - \mu_-$$

Definition

(Ω, Σ) Messraum mit $\mathfrak{B}(K) \subset \Sigma$,
$\mu : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ *reguläres Maß*, wenn $\forall A \in \Sigma$:

- $\mu(A) = sup\{\mu(L)| \quad L \subset A, \text{ L kompakt}\}$
- $\mu(A) = inf\{\mu(U)| \quad A \subset U, \text{ U offen}\}$

Lemma

Ω kompakt und metrisch, μ endliches Borelmaß $\Rightarrow$ μ regulär.

Definition

$T \in C(K)'$ heißt *positiv* wenn

$$f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0$$

Lemma

$\forall T \in C(K)'\ \exists T_-, T_+ \in C(K)'$ *positiv* :

$$T = T_+ - T_-$$

Lemma

$T \in C(K)'$ *positiv* $\Rightarrow$ *monoton*

$$f \leq g \Rightarrow T(f) \leq T(g)$$

Satz (Rieszscher Darstellungssatz)

$\forall T \in C(K)' \; \exists$ *reguläres signiertes Borelmaß* μ :

$$T(f) = \int_K f \; d\mu$$

Satz (Rieszscher Darstellungssatz)

$\forall T \in C(K)' \ \exists$ *reguläres signiertes Borelmaß* μ :

$$T(f) = \int_K f \, d\mu$$

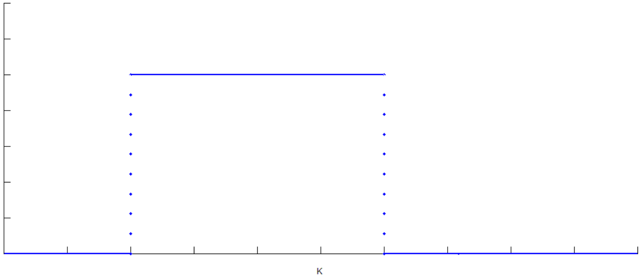
- Intuitiv:

$$\mu(A) = \int_K \mathbb{1}_A \, d\mu \stackrel{!}{=} T(\mathbb{1}_A) \qquad A \in \mathfrak{B}(K)$$

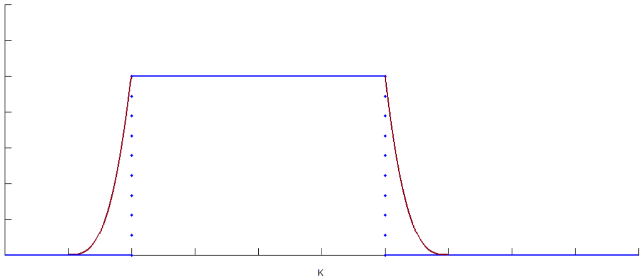
  Problem:

$$\text{i.A. } \mathbb{1}_A \notin C(K) \ \Rightarrow \ T(\mathbb{1}_A) \text{ nicht definiert!}$$

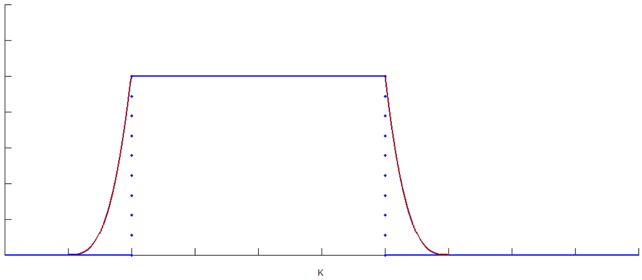
- Lösung:(OBdA T positiv)
  Approximation von $\mathbb{1}_A$ durch stetige Funktionen $f \geq 0$



- Lösung:(OBdA T positiv)
  Approximation von $\mathbb{1}_A$ durch stetige Funktionen $f \geq 0$

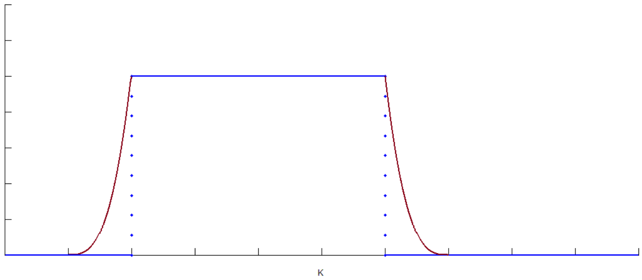


- Lösung:(OBdA T positiv)
  Approximation von $\mathbb{1}_A$ durch stetige Funktionen $f \geq 0$



- $\mu_*(L) := inf\{T(f)|\ f \geq \mathbb{1}_L,\ f \in C(K)\} \qquad \forall L \subset K$ kompakt

- Lösung:(OBdA T positiv)
  Approximation von $\mathbb{1}_A$ durch stetige Funktionen $f \geq 0$



- $\mu_*(L) := inf\{T(f)|\ f \geq \mathbb{1}_L,\ f \in C(K)\} \qquad \forall L \subset K$ kompakt
- Regularitätsbedingung:

$$\mu_*(A) := sup\{\mu_*(L)|\ L \subset A,\ \text{L kompakt}\} \qquad \forall A \subset K$$

- Konstruiert: $\mu_* : \mathfrak{P}(K) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Wir suchen:

$\mu : \mathfrak{B}(K) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Maß,

μ erfüllt

$$T(f) = \int_K f \; d\mu \qquad \forall f \in C(K)$$

- Konstruiert: $\mu_* : \mathfrak{P}(K) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

  Wir suchen:

  $\mu : \mathfrak{B}(K) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Maß,

  μ erfüllt

$$T(f) = \int_K f \; d\mu \qquad \forall f \in C(K)$$

- Benutze einen der Fortsetzungssätze von Carathéodory

Satz (Fortsetzungssatz)

Ist μ äußeres Maß über K mit:

- $\mu(L_1 \cup L_2) = \mu(L_1) + \mu(L_2) \qquad \forall L_1, L_2 \subset K$ *kompakt, disjunkt*
- $\mu(A) = inf\{\mu(U)|\ A \subset U,\ U\ offen\} \qquad \forall A \subset K$
- $\mu(U) = sup\{\mu(L)|\ L \subset U,\ L\ kompakt\} \qquad \forall U \subset K\ offen$

Dann ist $\mu|_{\mathfrak{B}(K)}$ ein Maß.

zur Erinnerung: äußeres Maß

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A) \leq \mu(B) \qquad A \subset B \subset K$
- $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \qquad (A_n \subset K\ \forall n \in \mathbb{N})$

Vorgehen

- Betrachte

$$\mu^*(A) := inf\{\mu_*(U)|\ A \subset U,\ \text{U offen}\} \tag{1}$$

- Zeige $\mu^*(L) = \mu_*(L) \quad \forall L \subset K$ kompakt

  und $\mu^*(U) = \mu_*(U) \quad \forall U \subset K$ offen

$$\Rightarrow \mu^*(U) := sup\{\mu_*(L)|\ L \subset U,\ \text{L kompakt}\} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \mu^*(L) := inf\{T(f)|\ f \geq \mathbb{1}_L,\ f \in C(K)\} \tag{3}$$

- 3 Beweisschritte:
  T(f)$\stackrel{(3)}{\to} L \in K$ kompakt $\stackrel{(2)}{\to} U \in K$ offen $\stackrel{(1)}{\to} A \in K$ beliebig

zur Erinnerung

$$\mu^*(L) := inf\{T(f)|\ f \geq \mathbb{1}_L,\ f \in C(K)\} \qquad (1)$$

- $\mu(L_1 \cup L_2) = \mu(L_1) + \mu(L_2) \qquad \forall L_1, L_2 \subset K$ kompakt, disjunkt

Beweis.

Teilbeweis

- $\mu^*(L_1 \cup L_2) \overset{!}{\leq} \mu^*(L_1) + \mu^*(L_2)$:

  Sei $f_1 \geq \mathbb{1}_{L_1},\ f_2 \geq \mathbb{1}_{L_2} \ \Rightarrow\ f_1 + f_2 \geq \mathbb{1}_{L_1 \cup L_2}$
  $\overset{(1)}{\Rightarrow} \mu^*(L_1 \cup L_2) \leq T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$
  $\overset{(1)}{\Rightarrow} \mu^*(L_1 \cup L_2) \leq \mu^*(L_1) + \mu^*(L_2)$

□

- Erhalten Borelmaß:

$$\mu := \mu^*|_{\mathfrak{B}(K)}$$

z.Z.: μ erfüllt:

$$T(f) = \int_K f \; d\mu \qquad \forall f \in C(K)$$

- Erhalten Borelmaß:

$$\mu := \mu^*|_{\mathfrak{B}(K)}$$

z.Z.: μ erfüllt:

$$T(f) = \int_K f \, d\mu \qquad \forall f \in C(K)$$

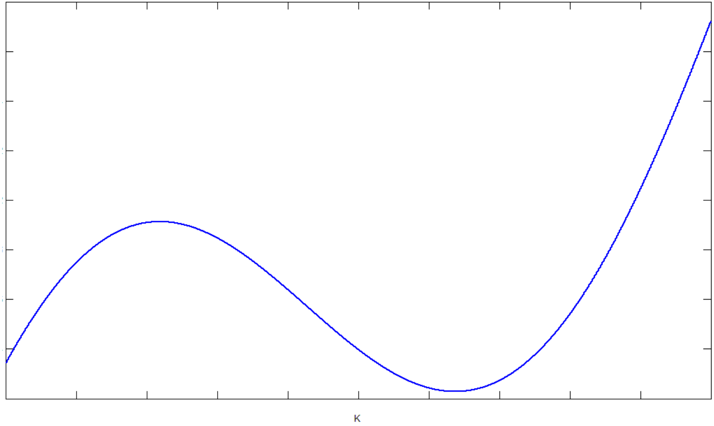
Lemma

μ erfüllt:

$$\mu(U) = sup\{T(f)|\ 0 \leq f \leq \mathbb{1}_U,\ f \in C(K)\} \qquad \forall U \subset K \ offen$$

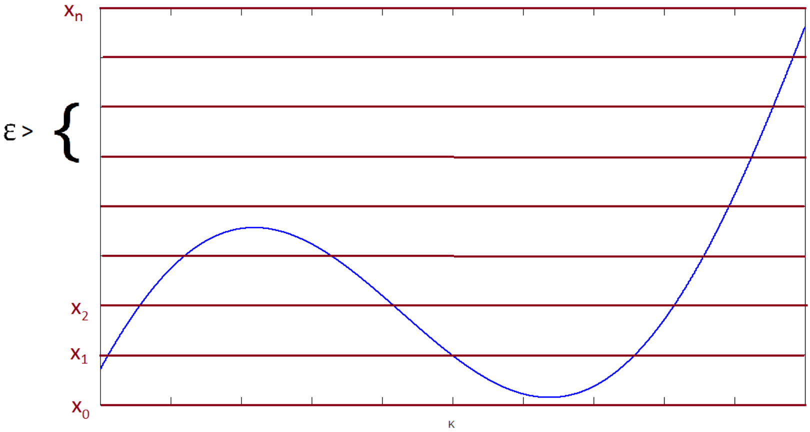
Beweis: Rieszscher Darstellungssatz

[OBdA: T positiv] $f \geq 0 \in C(K)$ $\Rightarrow$ f beschränkt

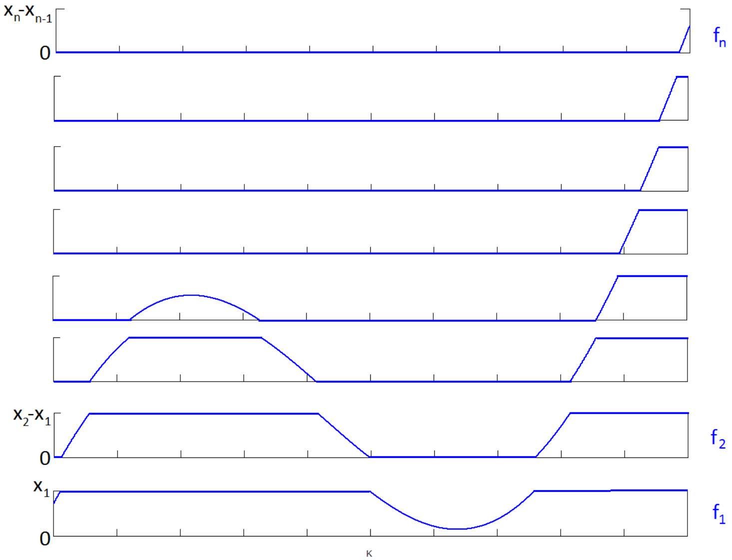


Beweis: Rieszscher Darstellungssatz

[OBdA: T positiv] $f \geq 0 \in C(K) \;\Rightarrow$ f beschränkt

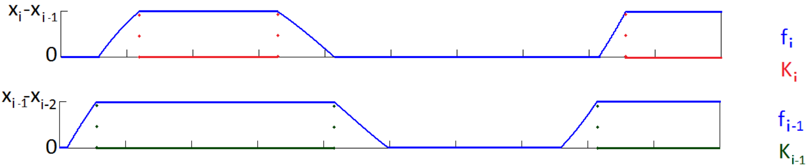


Beweis: Rieszscher Darstellungssatz



Beweis: Rieszscher Darstellungssatz

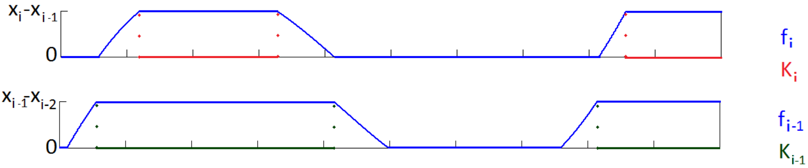
- $(K_i = \{f \geq x_i\})$



$$\mathbb{1}_{K_i} \leq \frac{1}{x_i - x_{i-1}} f_i \leq \mathbb{1}_{K_{i-1}} \qquad \forall i \in \{1 \ldots n\}$$

Beweis: Rieszscher Darstellungssatz

- $(K_i = \{f \geq x_i\})$



$$\mathbb{1}_{K_i} \leq \frac{1}{x_i - x_{i-1}} f_i \leq \mathbb{1}_{K_{i-1}} \qquad \forall i \in \{1 \ldots n\}$$

- $(x_i - x_{i-1})\mu(K_i) \leq T(f_i) \leq (x_i - x_{i-1})\mu(K_{i-1})$

zur Erinnerung

$$\mu(L) = \inf\{T(f) |\ f \geq \mathbb{1}_L,\ f \in C(K)\}$$
$$\mu(U) = \sup\{T(f) |\ 0 \leq f \leq \mathbb{1}_U,\ f \in C(K)\}$$

Beweis: Rieszscher Darstellungssatz

- $(x_i - x_{i-1})\mu(K_i) \leq \int_K f_i \, d\mu \leq (x_i - x_{i-1})\mu(K_{i-1})$

Beweis: Rieszscher Darstellungssatz

- $(x_i - x_{i-1})\mu(K_i) \leq \int_K f_i \; d\mu \leq (x_i - x_{i-1})\mu(K_{i-1})$
- Summiere alle Ungleichungen
  - $$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\mu(K_i) \leq T(f) \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\mu(K_{i-1})$$
  - $$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\mu(K_i) \leq \int_K f \; d\mu \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\mu(K_{i-1})$$

$$\Rightarrow \left| \int_K f \; d\mu - T(f) \right| \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\mu(K_{i-1} \setminus K_i)$$
$$\leq \varepsilon \cdot \mu(K) \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$(K_{i-1} \setminus K_i = \{x_{i-1} \leq f < x_i\})$

Beweis: Rieszscher Darstellungssatz

Fall $f \in C(K)$ bel. (nicht notwendig ≥ 0):

$\exists f_+, f_- \in C(K): \ f = f_+ - f_-$

$$T(f) = T(f_+) - T(f_-) = \int_K f_+ \, d\mu - \int_K f_- \, d\mu = \int_K f \, d\mu$$

Beweis: Rieszscher Darstellungssatz

- Gesehen: Rieszscher Darstellungssatz für T positiv.
- Nun: $\quad T \in C(K)'$ bel.

$$T(f) = T_+(f) - T_-(f)$$

$$= \int_K f \; d\mu_+ - \int_K f \; d\mu_-$$

$$= \int_K f_+ \; d(\mu_+ - \mu_-) \qquad \forall f \in C(K)$$

Setze $\mu = \mu_+ - \mu_-$ (signiertes Maß).

$\square$

Abschließende Bemerkungen

- $T \to \mu$ ist wohldefiniert
- $T \to \mu$ bijektiv, d.h.
$$C(K)' \cong M(K)$$
wobei $M(K)$ Raum der signierten, regulären Borelmaße über K
- $T \to \mu$ isometrisch bzgl.$(C(K)', ||\cdot||_O)$ und $(M(K), ||\cdot||_V)$
  - $||\cdot||_O$ *Operatornorm* bzgl. $(C(K), ||\cdot||_\infty)$ und $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
  - $||\mu||_V = \mu_+(K) + \mu_-(K)$ *Variationsnorm*