Existenz eines endlich additiven Inhalts

Sascha Frederik Gritzbach

Universität Ulm

29. Juni 2012

Problemstellung

Motivation

1. λ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ als intuitives Maß
2. nicht Borel-messbare Mengen
3. Erweiterung auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ möglich?

Problemstellung

Motivation

1. λ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ als intuitives Maß
2. nicht Borel-messbare Mengen
3. Erweiterung auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ möglich?

Einschränkungen

1. keine σ-Additivität: sonst existiert messbare Menge mit nicht-eindeutigem Inhalt (vgl. Vitali-Menge)
2. auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ für $d \geq 3$ nicht möglich: Banach-Tarski-Paradoxon

Begriffe aus der Funktionalanalysis

Sublinearform

$p \colon V \to \mathbb{R}$, falls

a) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \geq 0, x \in V$

b) Dreiecksungleichung

Beispiel: Jede Norm auf $\mathbb{R}^d$.

Begriffe aus der Funktionalanalysis

Sublinearform

$p\colon V \to \mathbb{R}$, falls

a) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \geq 0, x \in V$

b) Dreiecksungleichung

Beispiel: Jede Norm auf $\mathbb{R}^d$.

Lineares Funktional

Abbildung $V \to \mathbb{K}$ linear, V normiert

Beispiel: $f(x) := (x|y)$ für festes y.

Satz von Hahn-Banach

Aussage

V $\mathbb{R}$-VR, U Unterraum, $p\colon V \to \mathbb{R}$ sublinear,
$\phi\colon U \to \mathbb{R}$ linear mit $\phi \leq p$ auf U
Dann existiert lineare Fortsetzung Φ von ϕ mit $\Phi \leq p$ auf V.

Beweis

Schrittweise Erweiterung

Zuerst zeigen: Ist $dim V \setminus U = 1$, so existiert eine Fortsetzung.

Beweis

Schrittweise Erweiterung

Zuerst zeigen: Ist $dimV \setminus U = 1$, so existiert eine Fortsetzung.

Lemma von Zorn

$(A, \leq) \neq \emptyset$, teilweise geordnet. Jede totalgeordnete Teilmenge besitze ein Maximum.
Dann existiert ein maximales Element in A.

Beweis

Schrittweise Erweiterung

Zuerst zeigen: Ist $dim V \setminus U = 1$, so existiert eine Fortsetzung.

Lemma von Zorn

$(A, \leq) \neq \emptyset$, teilweise geordnet. Jede totalgeordnete Teilmenge besitze ein Maximum.
Dann existiert ein maximales Element in A.

Anwendung des Lemmas von Zorn

$$A := \left\{ (W, L_W) : \begin{array}{l} W \text{ Unterraum von } V \text{ mit } U \subset W \\ L_W : W \to \mathbb{R} \text{ linear mit } L_W \leq p_{|W}, L_{W|U} = l \end{array} \right\},$$

mit der Ordnung: $(V_1, L_{V_1}) \leq (V_2, L_{V_2}) :\Leftrightarrow V_1 \subset V_2, L_{V_2|V_1} = L_{V_1}$.
Für totalgeordnetes $B := \{(V_i, L_{V_i}) \ : \ i \in I\} \subset A$ definiere
$V = \bigcup_{i \in I} V_i, \ L_V(x) = L_{V_i}(x)$ für $x \in V_i (i \in I)$

Definitionen aus der Maßtheorie I

Ring

$R \subset \mathcal{P}(\Omega)$, falls

a) $\emptyset \in R$

b) $A, B \in R \Rightarrow A \cup B,\ A \setminus B \in R$

Definitionen aus der Maßtheorie I

Ring

$R \subset \mathcal{P}(\Omega)$, falls

a) $\emptyset \in R$

b) $A, B \in R \Rightarrow A \cup B,\ A \setminus B \in R$

Inhalt

$\nu\colon R \to \mathbb{R}$, wobei R Ring, falls

a) $\nu(\emptyset) = 0$

b) $\nu(E) \leq \nu(F) \qquad \forall\, E,\ F \in R,\ E \subset F$

c) $\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F) \qquad \forall\, E,\ F \in R$ disjunkt

Definition aus der Maßtheorie II

$\exists N$ Nullmenge, aber $N \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Deswegen:

Lebesgue-σ-Algebra

$\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{N})$, wobei $\mathcal{N}$ Menge aller Nullmengen

Bemerkung: Jede Nullmenge Lebesgue-messbar.

Hauptsatz

Aussage

V Menge der beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Periode 1

$\Rightarrow \exists \mathcal{L} : V \to \mathbb{R}$ linear mit

a) $\mathcal{L}(f) = \int_{(0,1]} f d\lambda \qquad \forall$ Lebesgue-messbare $f \in V$

b) $\mathcal{L}(f(x + x_0)) = \mathcal{L}(f(x)) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

c) $\mathcal{L}(f(1 - x)) = \mathcal{L}(f(x))$

Beweis Hauptsatz

Struktur

- Voraussetzungen Hahn-Banach: Majorisierende Sublinearform
- Hahn-Banach auf $\phi(f) := \int_{(0,1]} f d\lambda$ anwenden $\Rightarrow$ Fortsetzung Φ
- $\mathcal{L}(f) := \frac{1}{2}(\Phi(f(x)) + \Phi(f(1-x)))$, Eigenschaften nachrechnen

Beweis Hauptsatz

Definition der Sublinearform

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad M(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \frac{1}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i)$
$p(f) := \inf M(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad \phi(f) := \int_{(0,1]} f d\lambda$

Beweis Hauptsatz

Definition der Sublinearform

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad M(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \frac{1}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i)$
$p(f) := \inf M(f; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad \phi(f) := \int_{(0,1]} f d\lambda$

Satz von Hahn-Banach

V $\mathbb{R}$-VR, U Unterraum, $p\colon V \to \mathbb{R}$ sublinear,
$\phi\colon U \to \mathbb{R}$ linear mit $\phi \leq p$ auf U
Dann existiert lineare Fortsetzung Φ von ϕ mit $\Phi \leq p$ auf V.

Beweis Hauptsatz

Definition der Sublinearform

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad M(f; \alpha_1, \dots, \alpha_n) := \frac{1}{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha_i)$
$p(f) := \inf M(f; \alpha_1, \dots, \alpha_n) \qquad \phi(f) := \int_{(0,1]} f d\lambda$

Satz von Hahn-Banach

V $\mathbb{R}$-VR, U Unterraum, $p\colon V \to \mathbb{R}$ sublinear,
$\phi\colon U \to \mathbb{R}$ linear mit $\phi \leq p$ auf U
Dann existiert lineare Fortsetzung Φ von ϕ mit $\Phi \leq p$ auf V.

Voraussetzungen Hahn-Banach prüfen

1. Majorisierung
   $\phi(f) = \int_{(0,1]} f d\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{(0,1]} f(x + \alpha_i) <= M(f; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$
   wegen Linearität und Periodizität
2. $p(f + g) < p(f) + p(g) + 2\varepsilon$

Beweis Hauptsatz: Eigenschaften von $\mathcal{L}$ I

$\mathcal{L}(f) := \frac{1}{2}(\Phi(f(x)) + \Phi(f(1-x)))$

Punktsymmetrie

$\mathcal{L}(f(1-x)) = \mathcal{L}(f(x))$

Nach Definition.

Übereinstimmung mit Lebesgue-Integral

Weil $\phi(f(x)) = \int_{(0,1]} f(x) d\lambda = \int_{(0,1]} f(1-x) d\lambda = \phi(f(1-x))$.

Nichtnegativität

$f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(f) \geq 0$

Ausnutzen der Mayorisierung durch p

Beweis Hauptsatz: Eigenschaften von $\mathcal{L}$ II

$\mathcal{L}(f) := \frac{1}{2}(\Phi(f(x)) + \Phi(f(1-x)))$

Translationsinvarianz

$\mathcal{L}(f(x + x_0)) = \mathcal{L}(f(x))$

Hilfsfunktion $g(x) := f(x + x_0) - f(x)$, Ausnutzen von p.
Somit $\Phi(g) = 0$. Also Φ translationsinvariant.

V Menge aller beschr. Funktionen, Periode 1
$\exists \mathcal{L}\colon V \to \mathbb{R}$ linear :

a) Nichtnegativität
b) Übereinstimmung mit Lebesgue-Integral
c) Translationsinvarianz
d) Punktsymmetrie

Auf $\mathcal{P}((0,1])$ $\exists \nu$:

a) Nichtnegativität
b) Übereinstimmung mit Lebesguemaß
c) Translationsinvarianz
d) Punktsymmetrie
e) $\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F)$ $\forall\, E,\ F \in \mathcal{P}((0,1])$

V Menge aller beschr. Funktionen, Periode 1
$\exists \mathcal{L}\colon V \to \mathbb{R}$ linear :

a) Nichtnegativität
b) Übereinstimmung mit Lebesgue-Integral
c) Translationsinvarianz
d) Punktsymmetrie

Auf $\mathcal{P}((0,1])$ $\exists \nu$:

a) Nichtnegativität
b) Übereinstimmung mit Lebesguemaß
c) Translationsinvarianz
d) Punktsymmetrie
e) $\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F)$ $\forall\, E,\ F \in \mathcal{P}((0,1])$

Sei $E \subset (0,1]$. $\chi_E\colon (0,1] \to \{0,1\}$ periodisch auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Sei f_E die Fortsetzung. Dann $f \in V$.
Definiere $\nu(E) := \mathcal{L}(f_E)$.
Endliche Additivität wegen $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F$ für $E,\ F$ disjunkt.

Konstruktion des Inhalts auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\mu(A) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu((A \cap (k, k+1]) - k) \qquad \forall\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Literaturangaben

D. Werner
Funktionalanalysis.
Springer Verlag, 2007.

A.C. Zaanen.
Integration.
North-Holland Publishing Co, 1967.