Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis
Besprechung: 12.07.12
in E18 Heho 22

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 12

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 10

30. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1-Rand Γ, $\lambda > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ und $h \in L^2(\Gamma)$. Wir betrachten die Poissongleichung mit Neumannrandbedingungen

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{auf } \Omega \\ \partial_\nu u = h & \text{auf } \Gamma \end{cases}.$$

(a) Zeige, dass es genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (P) gibt. Dabei heißt eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ *schwache Lösung* von (P), falls $\lambda u - \Delta u = f$ und $\partial_\nu u = h$ im jeweiligen schwachen Sinn gelten. Folgere außerdem, dass $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

(b) Nun sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine schwache Lösung von (P). Zeige, dass u eine klassische Lösung ist.

31. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, sodass die Einbettung $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist. Zeige, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq c \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

für alle $u \in H^1_0(\Omega)$.

Gib außerdem ein Beispiel einer offenen Menge an, für die obige Poincaré-Ungleichung verletzt ist.

32. Es sei $\Omega := (-1,1)^2 \backslash (\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$. Entscheide, ob

(a) Ω die Fortsetzungseigenschaft besitzt.

(b) $H^1(\Omega)$ kompakt in $L^2(\Omega)$ eingebettet ist.

(c) $\{u_{|\Omega} : u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)\}$ dicht liegt in $H^1(\Omega)$.

(d) auf Ω die zweite Poincaré-Ungleichung gilt.

(e) Ω der äußeren Kugelbedingung genügt.

(f) Ω Dirichlet-regulär ist.