Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis
Besprechung: 19.07.2012

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 12

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 11

33. Darstellung über Orthonormalbasis
Es sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeige, dass für jede Folge $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$ der Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n$$

in H existiert.

(b) Zeige, dass

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n) e_n$$

für alle $x \in H$. Verwende hierzu ohne Beweis, dass $\sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2 < \infty$.

(c) Zeige, dass

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2$$

für alle $x \in H$.

34. Asymptotik des Neumann-Laplace-Operators
Wir befinden uns in der Situation von §24 der Vorlesung mit $b = 0$, d.h. wir betrachten den Neumann-Laplace-Operator A auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit C^1-Rand. Es sei $u_0 \in L^2(\Omega)$ und

$$w \in C^\infty((0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C([0,\infty); L^2(\Omega))$$

die Lösung des abstrakten Cauchyproblems $w' + Aw = 0$ und $w(0) = u_0$.

Zeige, dass

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0(x)\,\mathrm{d}x \cdot \mathbb{1}.$$

Hinweis: Bestimme den ersten Eigenvektor e_1 und verwende die Darstellung von w.

Erholsame und erfolgreiche Semesterferien!