Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis
Besprechung: 03.05.12

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 12

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen — Blatt 2

5. In dieser Aufgabe diskutieren wir die Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $[0, \pi]$ mit Neumann Randbedingungen.

$$\text{(WLG)} \quad \begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) & t > 0,\ x \in (0,\pi) \quad \text{(DGL)} \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 & t > 0 \quad \text{(RB)} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in [0,\pi] \quad \text{(AW)} \end{cases}$$

(a) Vorbemerkung: Aus der Grundvorlesung über Hilberträume und Fouriertransformation ist bekannt, dass die Folge der Fourierkoeffizienten einer 2π-periodischen stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in ℓ^2 liegt. Zeige: Ist $f \in C^1(\mathbb{R})$ und 2π-periodisch, so ist die Folge ihre Fourierkoeffizienten in ℓ^1.

Hinweis: Vergleiche die Fourierkoeff. von f und f' und verwende die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(b) Zeige, dass die Funktionen $u_n(t,x) := e^{-n^2 t}\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}_0$, das Randwertproblem lösen, d.h. dass $u_n \in C^{1,2}((0,\infty) \times (0,\pi)) \cap C([0,\infty) \times [0,\pi])$ und die Bedingungen (DGL) und (RB) erfüllt.

(c) Es sei $u_0 \in C^1[0,\pi]$ mit $u'(0) = u'(\pi) = 0$. Bestimme geeignete Konstanten $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$u(t,x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(t,x) \quad (t \geq 0,\ x \in [0,\pi])$$

ein Element aus $C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^{1,2}((0,\infty) \times (0,\pi))$ und Lösung von (WLG) ist.

(d) Es sei $u \in C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^{1,2}((0,\infty) \times (0,\pi))$ eine Lösung von (WLG). Zeige, dass die Gesamtwärme $W(t) := \int_0^\pi u(t,x)\,\mathrm{d}x$ unabhängig von $t \geq 0$ ist.

(e) Zeige, dass es für alle $u_0 \in C([0,\infty) \times [0,\pi])$ höchstens eine Lösung $u \in C([0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C^{1,2}((0,\infty) \times (0,\pi))$ von (WLG) gibt.

Hinweis: Untersuche das zeitliche Verhalten der Energie $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(t,x)\,\mathrm{d}x$.

6. In dieser Aufgabe diskutieren wir die Laplacegleichung auf einem Rechteck. Es sei $l > 0$, $\Omega := (0,\pi) \times (0,l)$ und $g \in C([0,\pi])$ mit $g(0) = g(\pi) = 0$. Wir suchen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, sodass

$$D(g) \quad \begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & y \in [0,l] \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,\pi] \\ u(x,l) = g(x) & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

(a) Finde durch Trennung der Variablen eine Lösung von $D(g)$ für einen Randwert g der Form $g(x) = \sum_{k=1}^m b_k \sin(kx)$.

(b) Bestimme eine Lösung von $D(g)$, falls $g \in C^1([0,\pi])$.

(c) Zeige, dass es höchstens eine Lösung von $D(g)$ gibt.