Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis
**Besprechung: 31.05.12**

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 12

# Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 5

**15.** Es sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $g \in L^\infty(a,b)$ mit $g \geq 0$ und $f \in L^2(a,b)$. Wir suchen eine Lösung folgenden Problems:

$$(P) \quad \begin{cases} u \in H^2(a,b) \\ gu - u'' = f \\ u(a) = 0 \\ u'(b) = 0. \end{cases}$$

Dazu definieren wir dir Form $a : H_0^1(a,b] \times H_0^1(a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$a(u,v) := \int_a^b u'v' + \int_a^b guv.$$

(a) Zeige, dass die Form $a$ bilinear, symmetrisch, stetig und koerziv ist.

(b) Zeige, dass ein $u \in H_0^1(a,b]$ genau dann das Problem (P) löst, wenn $a(u,v) = (f \mid v)$ für alle $v \in H_0^1(a,b]$.

(c) Zeige, dass das Problem (P) eine eindeutige Lösung $u \in H^2(a,b)$ besitzt. Zeige weiter, dass $u \in C^\infty(a,b)$, falls $f, g \in C^\infty(a,b)$.

**16.** Es sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $\lambda \geq 0$, $\beta > 0$, $f \in L^2(a,b)$ und $A, B \in \mathbb{R}$. Wir suchen eine Lösung folgenden elliptischen Problems mit inhomogenen gemischten Neumann- und Robin-Randbedingungen:

$$(P_{f,A,B}) \quad \begin{cases} u \in H^2(a,b) \\ \lambda u - u'' = f \\ \beta u(a) - u'(a) = A \\ u'(b) = B. \end{cases}$$

Wir definieren die Form $a : H^1(a,b) \times H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ durch

$$a(u,v) := \lambda \int_a^b uv + \int_a^b u'v' + \beta u(a)v(a).$$

(a) Zeige, dass die Form $a$ bilinear, symmetrisch und stetig ist.

(b) Zeige, dass die Form $a$ koerziv ist. **Hinweis:** Beachte, dass auch $\lambda = 0$ zugelassen ist.

(c) Zeige, dass eine Funktion $u \in H^1(a,b)$ genau dann das Problem $(P_{f,0,0})$ löst, wenn $a(u,v) = (f \mid v)$ für alle $v \in H^1(a,b)$.

(d) Konstruiere Funktionen $f_1, f_2 \in L^2(a,b)$, für die die Probleme $(P_{f_1,1,0})$ und $(P_{f_2,0,1})$ Lösungen besitzen. Diese bezeichnen wir im Folgenden mit $h_1$ und $h_2$. Zeige im Anschluss, dass ein $u \in H^2(a,b)$ genau dann Lösung von $(P_{f,A,B})$ ist, wenn die Funktion $u - Ah_1 - Bh_2$ Lösung von $(P_{f-Af_1-Bf_2,0,0})$ ist.

(e) Zeige, dass $(P_{f,A,B})$ eine eindeutige Lösung besitzt.