Universität Ulm
Institut für angewandte Analysis
Besprechung: 14.06.12

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Sommersemester 12

Übungen zu Partielle Differentialgleichungen

Blatt 6

17. Es sei $\Omega := (0,1) \cup (1,2) \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass $C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ nicht dicht in $H^1(\Omega)$ ist.

Hinweis: Beachte, dass $\mathbb{1}_{(1,2)} \in H^1(\Omega)$.

18. In dieser Aufgabe zeigen wir eine Umkehrung des Approximationssatzes: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $v, v_1, \ldots, v_d \in L^2(\Omega)$ und $(u_n) \subset C^1(\Omega)$ derart, dass

$$\lim u_n = v \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} = v_j \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, d\}$$

in $L^2(U)$ für alle $U \subset \Omega$ offen mit $\overline{U} \subset \Omega$. Zeige, dass $v \in H^1(\Omega)$ mit $D_j v = v_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$.

Hinweis: Zeige zunächst die Formel des partiellen Integrierens für $f \in C^1(\Omega)$ und $v \in C_c^1(\Omega)$.

19. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in H^1(\Omega)$ derart, dass $D_j u = 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$.

(a) Zeige, dass u *lokal konstant* ist, das heißt, dass es zu jedem $x_0 \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Konstante $c(x_0)$ gibt, sodass $u(x) = c(x_0)$ für fast alle $x \in B(x_0, \varepsilon)$.

Hinweis: Zeige die Behauptung zunächst für die regularisierten Funktionen $\varrho_n * u$.

(b) Zeige, dass u auf Ω konstant ist, falls Ω zusammenhängend ist.

20. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Zeige, dass

$$-\int_\Omega u\, D_j v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega D_j u\, v \,\mathrm{d}x$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$ und $j \in \{1, \ldots, d\}$.

Schlussfolgere, dass für $d = 1$ und $\Omega = (a, b)$ die Definitionen der schwachen Ableitung $D_j u$ aus Kapitel 2 und 3 konsistent sind.

21. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u, v \in H^1(\Omega)$. Zeige, dass auch die Funktion $w := u \wedge v$, definiert durch $w(x) := \min\{u(x), v(x)\}$, in $H^1(\Omega)$ liegt und bestimme ihre schwache Ableitung.