Übungen zur Analysis 1

Blatt 11

Bitte im Hochschulportal für die Vorleistung anmelden!

45. Untersuche folgende Funktionen auf $f : D \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und klassifiziere jede Unstetigkeitsstelle. (4x2)

(a) $f(x) := \begin{cases} \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ mit $D = \mathbb{R}$.

(b) $f(x) := \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-|x|}}{x} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$ mit $D = (-1, 1)$.

(c) $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ mit $D = \mathbb{R}$.

(d) $f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{(\cos(x^2+\log(x^2+1)))^2+1} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ mit $D = \mathbb{R}$.

46. Zeige mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die nachfolgend beschriebenen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 stetig sind. (2x2)

(a) Es sei f gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und $x_0 = 0$.

(b) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und f derart, dass ein $L > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

47. (a) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und $y \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von A. Zeige, dass $y = \inf A$ genau dann, wenn es eine Folge $(x_n) \subset A$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. (3)

(b) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < f(b)$. Zeige, dass für jedes $\alpha \in [f(a), f(b)]$ die Menge (3)

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) = \alpha\}$$

ein Minimum besitzt.

48. (a) Zeige, dass die Gleichung $\log x = \frac{1}{x}$ eine Lösung $x > 0$ besitzt. (2)

(b) Es sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom ungeraden Grades. Zeige, dass p eine reelle Nullstelle besitzt. (2)

(c) Es sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig. Zeige, dass es ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = x$ gibt. (2)