



Übungen zur Analysis 1

Blatt 13

Dieses Blatt wird nicht gewertet.

Sein Inhalt ist nicht für die erste, jedoch für die zweite Klausur relevant!

53. Bestimme und klassifiziere alle lokalen Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x - \sin x \cos x - \sin^2 x + \cos x + \sin x$$

im Intervall $[0, 2\pi]$.

54. Beweise die folgenden Behauptungen.

- (a) Für alle $x > 0$ gilt

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

- (b) Für alle $0 \leq x < y$ gilt

$$\frac{y-x}{1+y^2} < \arctan y - \arctan x < \frac{y-x}{1+x^2}$$

55. Zeige, dass die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv ist und berechne die Ableitung ihrer mit $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichneten Umkehrfunktion. Zeige weiter, dass

$$\operatorname{Arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

56. Bestimme, falls existent, folgende Grenzwerte.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + e^{2x})}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$