



Übungen zur Analysis 1

23. (a) Berechne die Zahlen $6!$, $\binom{42}{40}$ und $\binom{-\frac{1}{2}}{4}$. (3)
- (b) Von 49 Kugeln seien 6 rot und die übrigen schwarz gefärbt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, bei 6 zufällig gezogenen verschiedenen Kugeln, 3 rote und 3 schwarze Kugeln zu erhalten? Mit welcher Wahrscheinlichkeit tippt man beim Lotto genau 3 der gezogenen Zahlen richtig? (3)

24. Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$ und $a_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Finde eine Formel (ohne Summenzeichen) für die folgenden Ausdrücke. (6)

(a) $\sum_{k=0}^n (k+1)z^k$

(b) $\sum_{k=1}^n (a_k - 2a_{k-1} + a_{k-2})$

25. Beweise die folgenden Ungleichungen. (6)

- (a) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k(k-1)}{n}\right) \leq \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}.$$

- (b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \frac{|z|^k}{(k-2)!}.$$

26. Errate den Grenzwert $a = \lim a_n$ der nachstehend angegebenen reellen Zahlenfolgen und bestimme für gegebenes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N > 0$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$. (8)

(a) $a_n := \frac{n+4}{n+1}$

(b) $a_n := \frac{4n-1}{n^2+n^7+25}$

(c) $a_n := \frac{4n+1}{n^2-n^7+25}$

(d) $a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$