Universität Ulm

Abgabe:
**Bis 07.06.13, 8:15 Uhr**
**Briefkasten vor H3**

Dr. G. Baur
M. Gerlach
Sommersemester 13

32 Punkte

# Übungen zur Analysis 1

Blatt 7

**27.** Bestimme, falls existent, den Grenzwert nachstehender Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (8x2)

(a) $a_n := \dfrac{n^2 - 2n^3 + 4}{4n + 13n^3 - 2}$

(b) $a_n := \dfrac{2^n \cdot n^4 + 3^n \cdot n}{2 \cdot 3^n - n^7 + 2}$

(c) $a_n := \dfrac{2^n + (-2)^n}{3 \cdot 2^n}$

(d) $a_n := \dfrac{3^n + (-3)^n}{n \cdot 3^n}$

(e) $a_n := n^{23} \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$

(f) $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

(g) $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)^n$

(h) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

**28.** Es seien $(a_n)$ und $(b_n)$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Beweise die folgenden Aussagen. (4)

(a) Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

(b) Es ist $\lim_{n\to\infty} \min\{a_n, b_n\} = \min\{a, b\}$.

**29.** Finde jeweils ein Beispiel reeller Zahlenfolgen $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ und $(d_n)$, sodass (4)

(a) $a_n \sim b_n$ aber die Folge der Differenzen $a_n - b_n$ konvergiert nicht gegen 0.

(b) $a_n \sim b_n$ und $c_n \sim d_n$ aber $a_n + c_n \not\sim b_n + d_n$.

**30.** Es seien $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ und $(d_n)$ reelle Zahlenfolgen. Beweise die folgenden Aussagen. (4)

(a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$ und es ein $c > 0$ gibt, sodass $b_n \geq c > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a_n \sim b_n$.

(b) Falls $a_n \sim b_n$, $c_n \sim d_n$ und außerdem $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $a_n + c_n \sim b_n + d_n$.

**31.** Zeige, dass nachstehende Folgen $(a_n)$ konvergieren. (4)

(a) $a_n := \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

(b) $a_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$