Universität Ulm

Dr. G. Baur
M. Gerlach
Sommersemester 13

Abgabe:
Bis 14.06.13, 8:15 Uhr
Briefkasten vor H3

26 Punkte

Übungen zur Analysis 1

Blatt 8

32. Es sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeige, dass (4)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^a.$$

Anleitung: Schreibe $(1 + a_n/n)^n$ in der Form $(1 + a/n)^n \cdot r_n$ für geeignete r_n.

33. Es sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine konvergente Folge positiver reller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x > 0$. Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \log x_n = \log x$. (4)

Anleitung: Zeige erst, dass $1 - \frac{1}{a} \leq \log a \leq a - 1$ für alle $a > 0$, und folgere dann zunächst die Behauptung für $x = 1$.

34. Bestimme, falls existent, den Grenzwert nachstehender Folgen $(a_n) \subset \mathbb{R}$. (4x2)

(a) $a_n := \sqrt{\log(n^2 2^{-n} + e^{1/n})}$

(b) $a_n := \left(\dfrac{n+5}{n+3}\right)^n$

(c) $a_n := \dfrac{1}{n} \log(n + e^n)$

(d) $a_n := \left(5 + \dfrac{1}{n}\right)^{\left(2 - \frac{1}{n}\right)}$

35. (a) Bestimme alle Häufungswerte der Folgen (4)

$$a_n := \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n := (-1)^n \sqrt{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Hinweis: Begründe also jeweils auch, dass es keine weiteren Häufungswerte gibt.

(b) Gib jeweils ein Beispiel einer Folge mit genau 3 Häufungswerten und mit unendlich vielen Häufungswerten. (2)

36. Zeige, dass $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$. (4)

Anleitung: Zeige zunächst, dass $n^n e^{-n+1} \leq n! \leq n^{n+1} e^{-n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.