Übungen zur Analysis 1

Blatt 9

37. (a) Finde ein Beispiel einer divergenten Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$, für die folgendes gilt: (2x2)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall p \in \mathbb{N} \; \exists N > 0 \; \forall n \geq N : |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

(b) Es sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $0 < \alpha < 1$ derart, dass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \alpha \cdot |a_n - a_{n-1}|$$

für alle $n \geq 2$. Zeige, dass (a_n) konvergiert.

38. (a) Zeige, dass eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ genau dann gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn jede Teilfolge eine gegen a konvergente Teilfolge besitzt. (2x2)

(b) Zeige, dass

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$$

für jede beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

39. Bestimme lim sup und lim inf nachstehender Folgen $(a_n) \subset \mathbb{R}$. (2x2)

(a) $a_n := \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^n$

(b) $a_n := n - 5\left[\dfrac{n}{5}\right]$

40. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz. (8x2)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3+k^3}{k^4+k^2+17}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{\log(k^k)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{k}\right)^k\right)^k$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{\sqrt[k]{k!}}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+k^3}{e^k}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^6+k^7}{k^5-k^9}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^k$

(h) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\sqrt{2}} \cdot k}$