Aufgaben zur Probeklausur Analysis I

1. Bestimme für (8)

$$z = \frac{3+2i}{2i-1}$$

den Real- und Imaginärteil, die zu z konjugiert komplexe Zahl sowie den Betrag von z.

2. Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt. Zeige, dass das Infimum von $M_1 \cup M_2$ existiert und dass gilt (10)

$$\inf(M_1 \cup M_2) = \min\{\inf M_1, \inf M_2\}.$$

3. Bestimme, falls existent, Supremum und Maximum der Menge (10)

$$M := \left\{ \frac{3}{m} - \frac{2}{n} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \cup \{2\}.$$

4. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichheit gilt: (12)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+\alpha}{k} = \binom{n+\alpha+1}{n}.$$

5. Bestimme den Grenzwert der Folge (10)

$$a_n := \frac{n^3 + 2n}{3n^3 + \log n}$$

und beweise die Konvergenz mit Hilfe der Konvergenzdefinition.

6. Untersuche nachstehende Folgen $(a_n) \subset \mathbb{R}$ auf Konvergenz und bestimme ggf. ihren Grenzwert. (4x4)

(a) $a_n = \dfrac{n^2 + 2^n - 3^n}{3^n + n^2 2^n}$

(b) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$

(c) $a_n = \left(\dfrac{1 + (-1)^n n}{3+n} \right)^n$

(d) $a_n = \left(1 + \dfrac{\log n}{n} \right)^n$

7. Gegeben seien zwei beschränkte, reelle Folgen $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass (10)

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n - b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n - \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

8. Untersuche die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz. (6x4)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+\frac{1}{k})^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\log(k+2)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+2k^2+1}{k^5+k-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^4 e^{-k^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2i+3}{4}\right)^k$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\log(2^k)}{k^3}\right)^k$