Übungen zur Elemente der Funktionalanalysis

Blatt 3

6. Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Wir betrachten die durch (4)

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots) \quad \text{und} \quad R(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

gegebenen linearen Operatoren $L, R : \ell^p \to \ell^p$ (*Linksshift* und *Rechtsshift*). Zeige, dass $L, R \in \mathscr{L}(\ell^p)$ und berechne $\|L\|$ und $\|R\|$. Sind L und R injektiv und/oder surjektiv?

7. Wir betrachten den normierten Raum $X := (C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ und das durch $\varphi(f) := f(1)$ gegebene lineare Funktional $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Entscheide, ob φ stetig ist und berechne ggf. seine Norm. (4)

8. Berechne die Operatornorm einer Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wenn

(a) der Raum $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm $\|x\| = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$ versehen ist. (2)

(b) der Raum $\mathbb{R}^n$ mit der 1-Norm $\|x\|_1 = \sum_{k=1,\dots,n} |x_k|$ versehen ist. (2)

Zeige, dass es keine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gibt, sodass die durch (2)

$$\|A\|_\infty := \sup_{i,j=1,\dots,n} |a_{i,j}|$$

definierte Matrixnorm die induzierte Operatornorm ist.