Übungen zur Elemente der Funktionalanalysis — Blatt 4

9. Berechne die Norm des durch (4)

$$T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegebenen Operators $T \in \mathscr{L}(c_0)$.

10. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass der Dualraum von c_0 isometrisch isomorph zu ℓ^1 ist. Dazu sei $\varphi \in c_0^*$ gegeben und $x_k := \varphi(e_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass $(x_k) \in \ell^1$ und berechne $\|(x_k)\|_1$. (3)

Hinweis: Die Folge $(\operatorname{sgn} x_1, \operatorname{sgn} x_2, \ldots, \operatorname{sgn} x_n, 0, 0, \ldots)$ liegt in c_0.

(b) Zeige, dass (3)

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

für alle $y = (y_k) \in c_0$.

11. Es seien X und Y normierte Vektorräume und Y sei vollständig. Zeige, dass $\mathscr{L}(X, Y)$ versehen mit der Operatornorm ein Banachraum ist. (4)