Übungen zur Elemente der Funktionalanalysis — Blatt 6

14. Wir betrachten auf dem reellen Raum $C[0,1]$ die Skalarprodukte (4)

$$\langle f|g\rangle_1 := \int f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

und

$$\langle f|g\rangle_2 := \int f(x)\cdot g(x)\cdot x\,\mathrm{d}x$$

und erhalten so die Prähilberträume $H_j := (C[0,1], \langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle_j)$ für $j = 1,2$. Orthonormalisiere jeweils die Familie $\{1, x\}$ in den Räumen H_1 und H_2.

15. Wir bezeichnen mit (6)

$$L^2_+((0,1),\lambda) := \{f \in L^2((0,1),\lambda) : f \geq 0 \text{ fast überall}\}$$

den *positiven Kegel* von $L^2((0,1),\lambda)$.

(a) Zeige, dass $L^2_+((0,1),\lambda)$ eine abgeschlossene und konvexe Menge ist.

(b) Bestimme (d.h. rate und begründe) die orthogonale Projektion auf $L^2_+((0,1),\lambda)$.

16. Gib jeweils ein Beispiel für (4)

(a) einen Prähilbertraum H, eine abgeschlossene konvexe Menge $C \subset H$ und einen Punkt $x \in H$, der in C kein Proximum besitzt.

Hinweis: Betrachte $H = C[0,2]$ mit dem kanonischen Skalarprodukt.

(b) einen Banachraum X, eine abgeschlossen konvexe Teilmenge $C \subset X$ und einen Punkt $x \in H$, der in C mehrere Proxima besitzt.

Hinweis: Betrachte einen geeigneten endlich-dimensionalen Raum X.