Übungen zur Elemente der Funktionalanalysis

Blatt 7

17. Es sei U ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums H und $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von U. Zeige, dass die orthogonale Projektion P auf U für alle $x \in H$ durch (4)

$$Px = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x|e_n\rangle e_n$$

gegeben ist.

18. Es sei $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n) \subset \Sigma$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen mit $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$. Bestimme die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(X|\mathscr{F})$ einer Zufallsvariablen $X \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, wenn $\mathscr{F} := \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$ die von der Folge (A_n) erzeugte σ-Algebra ist. (5)

Hinweis: Es ist $\mathscr{F} = \{\cup_{k\in J} A_k : J \subset \mathbb{N}\}$ und somit jedes $f \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ von der Form $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \mathbb{1}_{A_k}$.

19. In dieser Aufgabe versehen wir den Vektorraum $\operatorname{span}\{\mathbb{1}, x\}$ wieder mit den Skalarprodukten (5)

$$\langle f|g\rangle_1 := \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x$$

und

$$\langle f|g\rangle_2 := \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \cdot x \,\mathrm{d}x$$

aus Aufgabe 14 und erhalten so die Hilberträume $H_j := (\operatorname{span}\{\mathbb{1}, x\}, \langle \cdot | \cdot \rangle_j)$ für $j = 1, 2$. Auf H_j betrachten wir jeweils das durch $\varphi(f) := f(0)$ gegebene Funktional. Bestimme für $j = 1, 2$ ein $g_j \in H_j$ derart, dass $\varphi(f) = \langle f|g_j\rangle_j$ für alle $f \in H_j$.