Übungen zu den Elementen der Funktionalanalysis Blatt 9

23. Es sei $e_k(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$ die kanonische Orthonormalbasis von $L^2(0, 2\pi)$ und

$$\mathscr{F} : L^2(0, 2\pi) \to \ell^2(\mathbb{Z})$$

die durch $f \mapsto (\langle f, e_k \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$ gegebene bijektive Isometrie. Die Abbildung $\mathscr{F}$ heißt auch *diskrete Fouriertransformation* und $\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle$ der k-te *Fourierkoeffizient* von f. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e_k$ in $L^2(0, 2\pi)$.

Es sei $\ell^{1,2}(\mathbb{Z}) := \{(x_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}) : (kx_k) \in \ell^2(\mathbb{Z})\}$.

(a) Zeige, dass für alle $u \in H^1_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$ die Folge ihrer Fourierkoeffizienten $(\hat{u}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ in $\ell^{1,2}(\mathbb{Z})$ liegt. (3)

(b) Zeige, dass es für alle $(x_k) \in \ell^{1,2}(\mathbb{Z})$ eine Funktion $v \in H^1_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$ gibt, sodass $\widehat{v}(k) = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$. (3)

Hinweis: Betrachte eine Funktion mit Fourierkoeffizienten (ikx_k) und deren Stammfunktion.

(c) Zeige, dass $\mathscr{F} H^1_{\mathrm{per}}(0, 2\pi) = \ell^{1,2}(\mathbb{Z})$. (2)

24. Es seien $a < b$ und $f, g \in H^1(a, b)$. Zeige, dass die Formel des partiellen Integrierens (6)

$$\int_a^b f(t) g'(t) \,\mathrm{d}t = f(t) g(t) \big|_{t=a}^b - \int_a^b f'(t) g(t) \,\mathrm{d}t$$

gilt und schlussfolgere, dass $f \cdot g \in H^1(a, b)$ mit $(fg)' = f'g + fg'$.