Universität Ulm
Abgabe:
**Di, 24.06.14**
**in der Vorlesung**

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. M. Gerlach
Sommersemester 14

24 Punkte

# Übungen zu den Elementen der Funktionentheorie Blatt 1

**1.** Berechne jeweils Real- und Imaginärteil, den Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen $z$. (8)

(a) $z := \dfrac{1-3i}{i-1} + \dfrac{3}{i+1}$

(b) $z := 2\exp\left(\dfrac{i\pi}{2}\right) - i - 1$

(c) $z := \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

(d) $z := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{-1}{i+1}\right)^k$

**2.** Entscheide in welchen Punkten folgende Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$ die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllen und welche der Funktionen holomorph sind. (8)

(a) $D = \mathbb{C}$, $f(x+iy) := x^3y^2 + ix^2y^3$

(b) $D = \mathbb{C}$, $f(z) := z \operatorname{Re} z$

(c) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) := \frac{z}{\overline{z}}$

(d) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(x+iy) := \frac{x-iy}{x^2+y^2}$.

**3.** Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\widetilde{D} := \{\overline{a} : a \in D\}$. Zeige, dass die durch $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ gegebene Funktion $g\colon \widetilde{D} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und bestimme ihre Ableitung. (4)

**4.** Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige, dass jede der folgenden Bedingungen impliziert, dass $f$ konstant ist.

(a) $\operatorname{Re} f$ ist konstant. (1)

(b) $\operatorname{Im} f$ ist konstant. (1)

(c) $|f|$ ist konstant. (2)

**Hinweis:** Aus Analysis 2 ist bekannt, dass eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer offenen und zusammenhängenden Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ konstant ist, falls $\nabla f = 0$.