Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. M. Gerlach
Sommersemester 14

Abgabe:
Do, 26.06.14
in der Vorlesung

24 Punkte

Übungen zu den Elementen der Funktionentheorie Blatt 2

5. Entwickle die folgenden Funktionen in Potenzreihen um z_0 und bestimme ihren Konvergenzradius. (10)

(a) $z \mapsto \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}$ und $z_0 = 0$

(b) $z \mapsto \dfrac{1}{(z-i)^2}$ und $z_0 = -i$

6. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n, f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Wir sagen, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- *kompakt gegen f konvergiert*, falls sie auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ gleichmäßig gegen f konvergiert.
- *lokal gleichmäßig gegen f konvergiert*, falls es für jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ eine offene Kreisscheibe $B_r(z_0) \subset \Omega$ gibt, auf der die Folge gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweise folgende Aussagen:

(a) Die Folge (f_n) konvergiert genau dann kompakt gegen f, wenn sie lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. (4)

(b) Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius R konvergiert auf $B_R(z_0)$ lokal gleichmäßig. (2)

Gib ein Beispiel einer Funktionenfolge $g_k\colon \Omega \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ derart, dass die Partialsummen $f_n(x) := \sum_{k=1}^n g_k(x)$ auf Ω gleichmäßig aber nicht normal konvergieren. (2)

7. Es sei $D := (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$ und $u\colon D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und harmonisch. Für $x_0 \in (a,b)$ und $y_0 \in (c,d)$ definieren wir $v : D \to \mathbb{R}$ durch

$$v(x,y) := \int_{y_0}^{y} \partial_1 u(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} \partial_2 u(t,y_0)\,\mathrm{d}t,$$

wobei ∂_i die Ableitung nach der i-ten Variablen bezeichnet.

(a) Zeige, dass $f := u + iv$ eine holomorphe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ definiert. (4)

(b) Finde eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$. (2)