Universität Ulm
Abgabe:
ohne Korrektur

Prof. Dr. W. Arendt
Dr. M. Gerlach
Sommersemester 14

0 Punkte

Lösungen zu den Elementen der Funktionentheorie Blatt 6

Dieses Blatt wird nicht korrigiert und nicht bewertet. Die Aufgaben dienen der Klausurvorbereitung und werden in der Übung am Donnerstag, den 24. Juli, vorgestellt.

Bitte im Hochschulportal für die Vorleistung anmelden! Die Vorleistungen werden am 20./21. Juli verbucht, die Anmeldefrist für die Prüfung endet am 22. Juli um 23:59 Uhr!

21. Klassifiziere jeweils die Art der Singularität folgender Funktionen $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ im Punkt 0 und berechne den Koeffizient a_{-1} der Laurentreihenentwicklung von f auf einer punktierten Umgebung um 0.

(a) $f(z) := \frac{\cos z - 1}{z^2}$.
(b) $f(z) := \sin(1/z^2)$.
(c) $f(z) := \frac{1}{\exp(z)-1}$.

Lösung:

(a) Bekanntlich ist

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit erhalten wir, nach Indexverschiebung, dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k}}{(2k+2)!}$$

für alle $z \neq 0$. Also ist f holomorph im Punkt $z = 0$ fortsetzbar (durch obige Formel), die Singularität ist also hebbar. Folglich ist $a_{-1} = 0$.

(b) Die Funktion f besitzt auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{-2(2k+1)}}{(2k+1)!}.$$

Weil der Hauptteil dieser Reihe nicht abbricht, ist z eine wesentliche Singularität. Weil nur geradzahlige Potenzen von z auftreten, ist $a_{-1} = 0$.

(c) Es ist

$$f(z) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right)^{-1}$$

für alle $z \neq 0$. Weil somit

$$z \cdot f(z) = \left(\frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right)^{-1}$$

holomorph im Punkt $z = 0$ fortgesetzt werden kann, besitzt f im Punkt 0 einen Pol erster Ordnung. Um das Residuum (also den Koeffizienten a_{-1} der Laurentreihe) zu bestimmen, verzichten wir darauf die ganze Laurentreihe zu berechnen! Stattdessen verwenden wir folgenden Trick: Ist

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k$$

gegeben, so ist $zf(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^{k+1}$ und also $a_{-1} = \lim_{z\to 0} zf(z)$. Aus obiger Berechnung ergibt sich somit $a_{-1} = 1$.

22. Berechne das uneigentliche Riemannintegral

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Anleitung:

- Für $R > 1$ definiere die Wege $\gamma_{1,R} := [-R, R]$ und $\gamma_{2,R}(t) := Re^{it}$ (für $t \in [0, \pi]$) sowie $\gamma_R := \gamma_{1,R} \oplus \gamma_{2,R}$. Berechne (mithilfe des Cauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel oder unter Verwendung des Residuensatzes) den Wert des Kurvenintegrals
$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z.$$
- Zeige, dass
$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z \right| = 0$$
und schließe auf den Wert von $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$. Zur Kontrolle: $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Lösung:

(a) Die Nullstellen des Nenners, also die vierten Wurzeln aus -1, lauten

$$\zeta_k = e^{\frac{2\pi ik}{4} + \frac{\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{4}} e^{\frac{2\pi ik}{4}}$$

für $k = 0, 1, 2, 3$. Es ist also

$$f(z) = \frac{1}{(1-\zeta_0)(1-\zeta_1)(1-\zeta_2)(1-\zeta_3)}.$$

Jede Nullstelle des Nenners ist also ein Pol erster Ordnung. Von diesen Wurzeln liegen die Punkte

$$\zeta_0 = e^{\frac{2\pi i}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \text{ und } \zeta_1 = e^{\frac{2\pi i 3}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

in dem von der Kurve γ_R für $R > 1$ umrandeten Gebiet. Wenn wir mit $\sum_{k=-1}^{\infty} a_k^{(0)}(z-\zeta_0)^k$ und $\sum_{k=-1}^{\infty} a_k^{(1)}(z-\zeta_1)^k$ die Laurententwicklung von f um die Punkte ζ_0 und ζ_1 bezeichnen, so erhalten wir aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z &= \int_{|z-\zeta_0|=1} \sum_{k=-1}^{\infty} a_k^{(0)}(z-\zeta_0)^k\,\mathrm{d}z + \int_{|z-\zeta_1|=1} \sum_{k=-1}^{\infty} a_k^{(1)}(z-\zeta_1)^k\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \int_{|z-\zeta_0|=1} a_k^{(0)}(z-\zeta_0)^k\,\mathrm{d}z + \sum_{k=-1}^{\infty} \int_{|z-\zeta_1|=1} a_k^{(1)}(z-\zeta_1)^k\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Weil alle Summanden für $k \neq -1$ auf der punktierten Umgebung um die Singularität eine Stammfunktion besitzen, ist

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-\zeta_0|=1} a_{-1}^{(0)}(z-\zeta_0)^{-1}\,\mathrm{d}z + \int_{|z-\zeta_1|=1} a_{-1}^{(1)}(z-\zeta_1)^{-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i(a_{-1}^{(0)} + a_{-1}^{(1)})$$

nach dem Cauchyschen Integralsatz und der Cauchyschen Integralformel. Dies ist gerade genau die Aussage des Residuensatzes: Der Wert des Kurvenintegrals über einen einfach geschlossenen Weg ergibt sich als $2\pi i$ mal der Summe über die Residuen der vom Integrationsweg eingefassten Singularitäten. Es bleibt also nur $a_{-1}^{(0)}$ und $a_{-1}^{(1)}$ zu bestimmen. Weil es sich um Pole erster Ordnung handelt, ist

$$a_{-1}^{(0)} = \lim_{z\to\zeta_0}(z-\zeta_0)f(z) = \frac{1}{(\zeta_0-\zeta_1)(\zeta_0-\zeta_2)(\zeta_0-\zeta_3)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-i)$$

und

$$a_{-1}^{(1)} = \lim_{z\to\zeta_1}(z-\zeta_1)f(z) = \frac{1}{(\zeta_1-\zeta_0)(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_3)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i).$$

Also ist

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{1}{4\sqrt{2}}(-2i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(b) Nach der Dreiecksungleichung ist $|1+z^4| \geq |z|^4 - 1$. Somit folgt aus der Fundamentalabschätzung, dass

$$\int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z \leq \pi R \frac{1}{R^4-1} \to 0 \quad (R\to\infty).$$

Also ist

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Aus der Symmetrie des Integranten schlussfolgern wir nun, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$