Universität Ulm

Abgabe:
31.10.11, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

16 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 1

1. Bestimme alle σ-Algebren auf der Grundmenge $\Omega = \{\clubsuit, \spadesuit, \blacklozenge\}$. (2)

2. Es seien Σ und Σ' σ-Algebren auf einer Grundmenge Ω sowie $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Zeige oder widerlege: (4)

(a) $\Sigma \cup \Sigma'$ ist eine σ-Algebra auf Ω.

(b) $\Sigma \cap \Sigma'$ ist eine σ-Algebra auf Ω.

(c) Es sei $\sigma(\mathcal{S}) = \Sigma$ und $\mathcal{S} \subset \Sigma'$. Dann ist $\Sigma \subset \Sigma'$.

(d) Es sei $\sigma(\mathcal{S}) = \Sigma$ und $\sigma(\mathcal{S}') = \Sigma'$. Dann ist $\sigma(\mathcal{S} \cap \mathcal{S}') = \Sigma \cap \Sigma'$

3. Zeige, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{S})$ für die folgende Teilmengensysteme $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(a) $\mathcal{S} = \{(a, b) : -\infty \leq a < b \leq \infty\}$ (2)

Hinweis: Schreibe jede offene Menge als Vereinigung von (a, b) mit a, $b \in \mathbb{Q}$.

(b) $\mathcal{S} = \{[a, b) : -\infty < a < b \leq \infty\}$ (2)

Hinweis: Benutze Aufgabenteil (a).

(c) $\mathcal{S} = \{K \subset \mathbb{R} : K \text{ kompakt } \}$ (2)

4. Für eine Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ auf einer Grundmenge Ω definieren wir

$$\limsup(A_n) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

sowie

$$\liminf(A_n) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Wir sagen, dass eine Mengenfolge $(A_n) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ gegen eine Grenzmenge $A \subset \Omega$ konvergiert, falls

$$A = \liminf(A_n) = \limsup(A_n).$$

(a) Zeige, dass für jede Folge $(A_n) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ stets $\liminf(A_n) \subset \limsup(A_n)$. (1)

(b) Es sei $(A_n) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sodass entweder $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (man sagt, die Folge (A_n) ist monoton wachsend) oder $A_n \supset A_{n+1}$ ((A_n) ist monoton fallend). Zeige, dass (A_n) konvergiert und bestimme ihre Grenzmenge. (1)

(c) Es sei $\Omega = \mathbb{N}$. Entscheide, ob nachstehende Mengenfolgen konvergieren und bestimme ihre Grenzmenge. (2)

- $A_n := \{k \in \mathbb{N} : n \text{ teilt } k\}$.
- $A_n := \{k \in \mathbb{N} : k \text{ ist Primteiler von } n\}$.