Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

16+10 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 14

44. Berechne, falls definiert, die iterierten Integrale (12)

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_2(y)\,\mathrm{d}\mu_1(x) \quad \text{and} \quad \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\,\mathrm{d}\mu_2(y)$$

für die folgenden Maßräume $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, und messbare Funktionen $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$. Entscheide zudem, ob f bzgl. $(\mu_1 \otimes \mu_2)$ integrierbar ist.

(a) $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{N}$, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu_1 = \mu_2$ das Zählmaß, $f(k,l) := \mathbb{1}_{\{l\}}(k) - \mathbb{1}_{\{l+1\}}(k)$.

(b) $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu_1 = \mu_2 = \lambda$,

$$f(x,y) := \begin{cases} x \cdot y & |xy| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) $\Omega_1 = \mathbb{N}$, $\Omega_2 = (0,1)$, $\Sigma_1 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\Sigma_2 = \mathcal{B}(0,1)$, $\mu_2 = \lambda$, $\mu_1(A) := (h\,\mathrm{d}\nu)(A)$ mit $h(k) = k$ und dem Zählmaß ν, $f(k,t) := (-\frac{t}{2})^{k-1}$.

45. Berechne das 3-dimensionale Lebesguesmaß $\lambda(M)$ der Menge (4)

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

46. In dieser Aufgabe zeigen wir schrittweise, dass das uneigentliche Riemannintegral $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ hat.

(a) Zeige, dass (1)

$$\int_0^\infty \exp(-tx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}$$

für alle $t > 0$.

(b) Folgere aus dem Satz von Fubini, dass (3)

$$\int_0^n \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_0^n \exp(-tx)\sin(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeige, dass (2)

$$\int_0^n \exp(-tx)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1 - \exp(-xn)(\cos n + x\sin n)}{1 + x^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. **Hinweis:** Benutze, dass $\sin t = \mathrm{Im}(e^{it})$ und $\cos t = \mathrm{Re}(e^{it})$.

(d) Folgere aus dem Satz von Lebesgue, dass (4)

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$