Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

16 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 3

9. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen. (4)

(a) Es sei $J \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sowie $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für alle $j \in J$. Dann ist $\cup_{j\in J} B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) Es sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $(A_n) \subset \mathcal{P}(\Omega)\backslash\Sigma$. Dann ist $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \notin \Sigma$.

(c) In $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ist $\emptyset$ die einzige offene Nullmenge.

(d) Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $\mathcal{S} \subset \Sigma$ derart, dass $\sigma(\mathcal{S}) = \Sigma$ und $\mu(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{S}$. Dann ist $\mu(A) = 0$ für alle $A \in \Sigma$.

10. Es sei $\Omega := \mathbb{N}$ und $\mathcal{S} := \mathcal{P}(2\mathbb{N})$, die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, die nur aus geraden Zahlen bestehen.

(a) Charakterisiere die Elemente von $\Sigma := \sigma(\mathcal{S})$. (2)

(b) Es sei $\mu = \delta_{2011}$, das Dirac-Maß im Punkt 2011. Entscheide, ob der Maßraum (Ω, Σ, μ) nicht-messbare Nullmengen enthält. (1)

(c) Es sei $\mu = \delta_{2012}$, das Dirac-Maß im Punkt 2012. Entscheide, ob der Maßraum (Ω, Σ, μ) nicht-messbare Nullmengen enthält. (1)

11. Wir betrachten die Grundmenge $\Omega = [0, 1]$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}([0, 1])$ und dem Lebesguemaß λ. Es sei

$$C_n := \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left[\frac{3k}{3^n}, \frac{3k+1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{3k+2}{3^n}, \frac{3k+3}{3^n}\right] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und

$$\mathcal{C} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

(a) Zeichne die Mengen C_1, C_2 und C_3 sowie $C_1 \cap C_2 \cap C_3$. (2)

(b) Entscheide, ob die Menge $\mathcal{C}$ Borel-messbar ist. Berechne ggf. ihr Lebesguemaß $\lambda(\mathcal{C})$. (3)

Hinweis: Betrachte die Mengen $A_k = \cap_{n\leq k} C_n$.

(c) Zeige, dass $\mathcal{C}$ überabzählbar ist. (3)

Hinweis: Finde für eine potenzielle Abzählung (x_n) der Menge $\mathcal{C}$ eine monoton fallende Folge abgeschlossener Intervalle $(A_n) \subset [0, 1]$, sodass $x_n \notin A_n$ und $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathcal{C}$.