Universität Ulm
Abgabe:
21.11.2011, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

16 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 4

12. Es sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum. Bestimme alle messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ im Falle, dass (3)

(a) $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$.

(b) $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$.

(c) $\Sigma = \{\emptyset, \Omega, A, \Omega\backslash A\}$ für eine Menge $A \subset \Omega$.

13. Zeige, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist, falls (4)

(a) f stetig ist.

(b) f monoton ist.

14. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Definiere $\nu(B) := \mu(f^{-1}(B))$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Das Maß ν heißt auch das *Bildmaß von μ unter f.*

(a) Zeige, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu)$ ein Maßraum ist. (3)

(b) Es sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu = \lambda$ und $f(x) = x^3 - 1$. Bestimme $\nu([-1, 7])$. (1)

15. Es sei Ω eine beliebige Grundmenge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Mit $\sigma(f)$ bezeichnen wir den Durchschnitt aller σ-Algebren auf Ω bzgl. derer f messbar ist, d.h. $\sigma(f)$ ist die kleinste σ-Algebra mit dieser Eigenschaft.

(a) Es sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeige, dass $\sigma(f) = \sigma(\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{S}\})$. (3)

Nun sei $\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ sowie $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := x + y$ und $g(x, y) := x$.

(b) Bestimme $\sigma(f)$. (1)

(c) Entscheide, ob g bzgl. $\sigma(f)$ messbar ist. (1)