UNIVERSITÄT ULM
Abgabe:
28.11.2011, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

16 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 5

16. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Wir betrachten den Grundraum $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ und definieren auf der Potenzmenge von Ω das Maß (4)

$$\mu(M) := \sum_{m \in M} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \quad (M \in \mathcal{P}(\Omega)).$$

Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(k) = k$. Berechne den Wert des Integrals

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

17. Es sei Ω eine Menge und $(A_n) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Folge von Teilmengen. Zeige, dass (2)

$$\limsup_{n \to \infty} (\mathbb{1}_{A_n}(x)) = \mathbb{1}_{\limsup(A_n)}(x)$$

für alle $x \in \Omega$.

18. Es sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Funktionen. Zeige, dass folgende Mengen M messbar sind.

(a) $M := \{x \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existiert}\}$ (2)

(b) $M := \{x \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 27\}$ (3)

19. Es sei Ω eine beliebige Grundmenge und $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $\sigma(\mathcal{F})$ den Durchschnitt aller σ-Algebren auf Ω bzgl. derer alle Funktionen $f \in \mathcal{F}$ messbar sind, d.h. $\sigma(\mathcal{F})$ ist die kleinste σ-Algebra mit dieser Eigenschaft.

Wir betrachten nun den Grundraum $\Omega = \mathbb{R}^2$.

(a) Zeige, dass es für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 < b_1$ und $a_2 < b_2$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass (2)

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \mathbb{1}_{(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

(b) Zeige, dass $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, wenn wir als $\mathcal{F}$ die Menge aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ wählen. (3)

Hinweis: Verwende, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ von allen offenen Rechtecken $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ erzeugt wird.