Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

16 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 6

20. Es sei $[0,1]$ versehen mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}([0,1])$ und dem Lebesguemaß λ. Wir betrachten die messbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = 1 - x$. (6)

(a) Finde eine Folge einfacher messbarer Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass
- $f_{n+1} \geq f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [0,1]$

(b) Berechne den Wert von
$$\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\lambda$$
mit Hilfe von Aufgabenteil (a).

21. Es bezeichne $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (vgl. Aufgabe 5). Zeige, dass (4)
$$\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$
für alle $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$.

Hinweis: Approximiere f durch einfache Funktionen und verwende den Satz von Beppo-Levi.

22. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und $\nu := \mu \circ f^{-1}$ *das Bildmaß von* μ *unter* f aus Aufgabe 14. (6)

(a) Zeige, dass
$$\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu = \int_{\Omega} g \circ f \,\mathrm{d}\mu$$
für alle $g \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(b) Zeige, dass
$$\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu = \int_{\Omega} g \circ f \,\mathrm{d}\mu$$
für alle $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Hinweis: Benutze (a) und den Satz von Beppo-Levi.

(c) Nun sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ferner sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(k) := 2^k$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben sei durch $g(x) := \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Berechne den Wert des Integrals
$$\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\nu.$$