Universität Ulm

Abgabe:
12.12.2011, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

16 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 7

23. Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ eine monoton fallende Funktion. Zeige, dass f genau dann bzgl. des Lebesguemaßes λ auf $[1, \infty)$ integrierbar ist, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$. (4)

24. Bestimme, falls existent, den Grenzwert (12)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$$

in den folgenden Fällen.

(a) Es sei $\Omega := [0, 2\pi]$, $\mu := \lambda$ und $f_n(x) := \sin(x)^n$.

(b) Es sei $\Omega := [0, 2\pi]$, $\mu := \delta_{3\pi/2}$ und $f_n(x) := \sin(x)^n$.

(c) Es sei $\Omega := \mathbb{R}$, $f_n(x) := \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$ und $\mu := h \,\mathrm{d}\lambda$ mit $h(x) := \frac{1}{x^2}$.

(d) Es sei $\Omega := [0, 2]$, $\mu := \lambda$ und $f_n(x) := x^n$.

(e) Es sei $\Omega := (0, \infty)$, $f_n(x) := (1 - x^{-n})\mathbb{1}_{[1,n]}(x)$ und μ bezeichne das Bildmaß von λ unter der Funktion $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$, gegeben durch $h(x) := \frac{1}{x}$.

(f) Es sei $\Omega := \mathbb{N}$, $f_n(k) := (\frac{k}{n} - 2)^k \mathbb{1}_{\{1,\ldots,n\}}(k)$ und $\mu := h \,\mathrm{d}\nu$, wobei die Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch $h(k) := \frac{1}{4^k}$ und ν das Zählmaß bezeichne.

In den Aufgabenteilen (a)-(e) sei Ω mit der Borel-σ-Algebra, in Teil (f) mit der Potenzmenge versehen.