Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 12/13

21 Punkte

Analysis II für Informatiker und Ingenieure

Blatt 6

25. Bestimmen Sie (für festes $r > 0$ und $h > 0$) die Bogenlängen der folgenden Kurven. (2x2)

(a) $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 4\pi]$.

(b) $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$.

Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

26. Geben Sie jeweils (ohne Beweis) das Innere, den Rand und den Abschluss der folgenden Mengen an. (2x2)

(a) $M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 < z \leq x^2 + y^2 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) $M = \mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$.

27. In dieser Aufgabe betrachten wir stets Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen: (3)

(i) Sind A und B offen, so ist auch $A \cap B$ offen.

(ii) Sind A und B konvex, so ist auch $A \cap B$ konvex.

(iii) Sind A und B zusammenhängend, so ist auch $A \cap B$ zusammenhängend.

(b) Zeigen Sie, dass die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen offen ist. (2)

(c) Entscheiden Sie, ob auch der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen offen ist. (2)

28. Entscheiden Sie, ob nachfolgende Funktionen stetig sind. (6)

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^3y^2 - zx \\ xe^y \sin z \end{pmatrix}$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^2}{x^4+y^2} & x^4 + y^2 > 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$

Lösung:

(b) Man überprüft leicht, dass $f(x, y) = yg(x, y)$, wobei

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0. \end{cases}$$

Da g als Verknüpfung der stetigen Funktionen $w(x,y) := xy$ und

$$h(t) := \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

stetig ist, ist auch f stetig.