



UNIVERSITÄT ULM

Abgabe:

Bis 26.10.12, 10:15

Briefkasten vor H3

Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 12/13

19 Punkte

Analysis II für Informatiker und Ingenieure

Blatt 1

Auf diesem Übungsblatt soll der Kernstoff der Differentialrechnung (Ende SS 2012) eingeübt werden. Mit der Technik des Differenzierens sind Sie hoffentlich vertraut (wenn nicht, einüben! z.B. anhand der Aufgaben 61 und 62 von Blatt 13 des letzten Semesters).

1. Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := e^{-2x} + \cos(5x) - 7x$. (4)

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(b) Nach (a) ist f umkehrbar und wegen $f(0) = 2$ ist dann $f^{-1}(2) = 0$. Mit welcher Steigung verläuft der Graph von f^{-1} durch den Punkt $(2, 0)$?

2. Beweisen Sie folgende Aussagen. (3+2)

(i) Die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Hinweis: Denken Sie an die Identitäten zwischen \sinh und \cosh .

(ii) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Zeigen Sie, dass (2)

$$\min_{x \in [0,1]} (x^2 - 1)e^{-2x} \quad \text{und} \quad \max_{x \in [0,1]} (x^2 - 1)e^{-2x}$$

existieren und berechnen Sie diese Werte.

4. Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte. (6)

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sinh x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos(3x)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\tan x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{\sinh x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x$ für festes $\alpha > 0$.

5. Zeigen Sie, dass (2)

$$\frac{y-x}{1+y^2} < \arctan y - \arctan x < \frac{y-x}{1+x^2}$$

für alle $0 \leq x < y$.