Universität Ulm

Abgabe:
Bis 16.11.12, 10:15
Briefkasten vor H3

Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 12/13

20 Punkte

Analysis II für Informatiker und Ingenieure

Blatt 4

15. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen. (4x2)

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(x-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{5k}}{2^k}$

16. Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe (2+2)

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}\cos(kx)$$

gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert und berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

17. Betrachten Sie die durch (3x2)

$$f_n(x) := e^{-nx} \quad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

gegebene Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen.

(a) Die Folge (f_n) ist auf $[0,\infty)$ gleichmäßig konvergent.

(b) Die Folge (f_n) ist auf $[\delta,\infty)$ für jedes $\delta > 0$ gleichmäßig konvergent.

(c) Die Folge (f_n) ist auf $(0,\infty)$ gleichmäßig konvergent.

18. Es sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen, sodass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(c)$ für ein $c \in [a,b]$ existiert und die Folge der Ableitungen (f_n') gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen eine Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. (2)

Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen eine differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert mit Ableitung $f' = g$.