Universität Ulm

Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 12/13

Lösungen zur Klausur Analysis IIa für Informatiker

1. (a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := e^{\sqrt{x}}$ auf $(0, \infty)$. (6)

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := \dfrac{3x^5 + 2x^3}{x^6 + x^4 + 1}$ auf $\mathbb{R}$. (6)

(c) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^2 \frac{8}{4 + x^2}\,\mathrm{d}x$. (6)

Lösung:

(a) Mit der Substitution $u = \sqrt{x}$ und partieller Integration erhält man

$$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2ue^u\,\mathrm{d}u = 2ue^u - 2\int e^u\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}$$

(b) Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^6 + x^4 + 1) = 2(3x^5 + 2x^3)$, ist $F(x) := \frac{1}{2}\log(x^6 + x^4 + 1)$ eine Stammfunktion von f.

(c) Es ist

$$\int_0^2 \frac{8}{4 + x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \frac{1}{1 + u^2}\,\mathrm{d}u = 4(\arctan(1) - \arctan(0)) = \pi.$$

2. Berechnen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte. (12)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sinh(3x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

Lösung:

(6)

(a) Nach dem Satz von l'Hospital ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sinh(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{3\cosh(3x)} = \frac{2}{3}.$$

(6)

(b) Nach zweifacher Anwendung des Satzes von l'Hospital ist

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0$$

3. Entscheiden Sie, ob die Funktionenfolge (9)

$$f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(n^2 e^{-\sqrt{x/n}})$$

auf $[0, \infty)$ gleichmäßig konvergiert.

Lösung: Für gegebenes $\varepsilon > 0$ ist

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n} < \varepsilon$$

für alle $n > \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Somit konvergiert die Funktionenfolge (f_n) auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen 0.

4. Entwickeln Sie die Funktion (15)

$$f(x) := \frac{2-3x}{(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

in eine Potenzreihe um 0 und geben Sie deren Konvergenzradius an.

Lösung: Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{2-3x}{(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-\frac{1}{2}}$$

liefert $A = -2$ und $B = -1$. Also ist

$$\frac{2-3x}{(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{1-x} + \frac{2}{1-2x}.$$

Entwickelt man dies mit Hilfe der geometrischen Reihe, so erhält man

$$\frac{2-3x}{(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty} (1+2^k)x^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{2}$.

5. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := e^{x^2-2x+y^2}$. (20)

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(0,0)^T$ in Richtung des Vektors $(1,1)^T$.

(c) Berechnen Sie die Hessematrix von f.

(d) Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extremstellen von f.

Lösung:

(a) Es ist $\nabla f(x,y) = ((2x-2)e^{x^2-2x+y^2}, 2ye^{x^2-2x+y^2})$. (5)

(b) Es ist $\nabla f(0,0) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T = (-2,0) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. (5)

(c) (5)

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (2+(2x-2)^2)e^{x^2-2x+y^2} & 2y(2x-2)e^{x^2-2x+y^2} \\ 2y(2x-2)e^{x^2-2x+y^2} & (2+4y^2)e^{x^2-2x+y^2} \end{pmatrix}$$

(5)

(d) Es ist $\nabla f(x,y) = (0,0)$ genau dann, wenn $(x,y) = (1,0)$. Also ist dies der einzige kritische Punkt. Da die Hessematrix

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

an dieser Stelle positiv definit ist (z.B. nach dem Hauptminorenkriterium), ist $(1,0)$ Stelle eines lokalen Minimums.

6. Es sei $M := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := x - y$ gegeben. (17)

(a) Skizzieren Sie die Menge M und geben Sie jeweils (ohne Begründung) an, ob sie abgeschlossen, offen, zusammenhängend und konvex ist.

(b) Entscheiden Sie, ob die Funktion f ein Maximum und ein Minimum besitzt und bestimmen Sie diese Werte gegebenenfalls.

Lösung:

(a) Die Menge M ist abgeschlossen, nicht offen, zusammenhängend und konvex.

(3 Punkte für die Skizze, 4 für die Analyse)

(b) Da die Funktion f stetig ist, nimmt sie auf der kompakten Menge M ihr Maximum und Minimum an (2 Punkte).

Weil der Gradient $\nabla f(x,y) = (1,-1)$ nirgends verschwindet, besitzt f kein lokales Extremum im Inneren von M (2 Punkte). Also liegen die globalen Extrema von f auf dem Rand von M und nach dem Satz von Lagrange gilt für sie folgende notwendige Bedingung:

Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ mit $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Wir erhalten also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda 2x \\ -1 &= \lambda 2y. \end{aligned}$$

Offenbar ist $\lambda \neq 0$ und somit $x = -y$. Aus der Nebenbedingung folgt nun $x = \pm\sqrt{2}$ und $y = \mp\sqrt{2}$. Also ist

$$\max_M f = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \min_M f = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$$

(6 Punkte für die Bestimmung und Klassifikation der Extrema auf dem Rand)

7. Zeigen Sie, dass es keine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla F = (y, -x)$ gibt. (9)

Lösung: Für eine solche Funktion F wäre $F_{xy} = 1 \neq F_{yx} = -1$ im Widerspruch zum Satz von Schwarz.