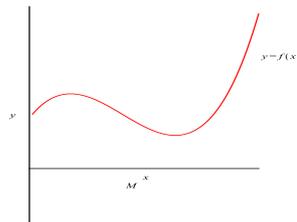


Kapitel III Funktionen in mehreren Veränderlichen

§ 1 Einleitung: Geometrische Interpretationen

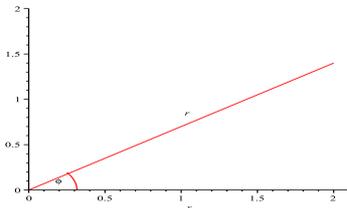
A: Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ Graph: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} : x \in M \right\} \subset \mathbb{R}^2$: explizit gegebene Kurve.



Legt man andere Koordinaten zugrunde, so sind andere geometrische Interpretationen möglich. Ein wichtiges Beispiel sind Darstellungen über Polarkoordinaten:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ kartesisch \leftrightarrow $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$ in Polarkoordinaten.



Offensichtliche Transformationsformeln:

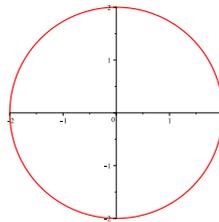
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{bzw.}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}.$$

Beschreibung in Polarkoordinaten:

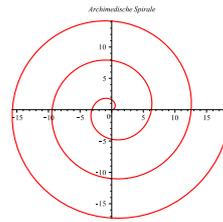
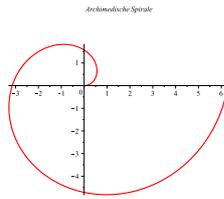
$\varphi \rightarrow r(\varphi) \Rightarrow$ Graph: $\left\{ \begin{pmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in M \right\}$, z.B.

- $r(\varphi) \equiv r$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$: Kreis um 0 mit Radius r

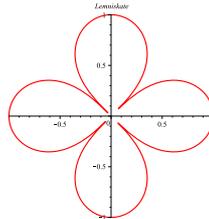


- $r(\varphi) \equiv r$, $0 \leq \varphi \leq 6\pi$: derselbe Kreis, dreimal durchlaufen.

- $r(\varphi) = \phi, \varphi \in [0, \infty)$ Archimedische Spirale



- $r(\varphi) = \sqrt{|\cos 2\varphi|}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$: Lemniskate



Die Beispiele zeigen: Kurven im \mathbb{R}^2 sind u.U. in Polarkoordinaten explizit dargestellt, wohingegen das kartesisch nicht immer gelingt, s.Kreis:
 $r(\phi) = r$ bzw. $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

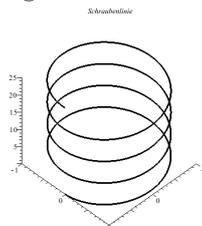
B: Funktionen $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Einige Beispiele:

- $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ Einheitskreislinie

- $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit
 Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}$ ($r, h > 0$ fest) Schraubenlinie
 mit vier Umdrehungen



Definition:

Eine Funktion $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, notiert in der Form

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}, \text{ f\"ur die alle Komponentenfunktionen } \gamma_i(t), 1 \leq i \leq n$$

stetig sind auf I nennen wir eine (parametrisierte) n -dimensionale **Kurve**. Im Falle $I = [a, b]$ heißt $\gamma(a)$ der **Anfangspunkt**, $\gamma(b)$ der **Endpunkt** von γ . Schließlich heißt γ **geschlossen**, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.

Wir nennen γ **glatt**, falls alle Komponenten differenzierbar sind, und in

$$\text{diesem Fall nennen wir } \dot{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix} \text{ (Punktnotation ist hier blicher$$

als die Strichnotation der Ableitung) den **Tangential- oder Geschwindigkeitsvektor** von γ . Wir nennen γ **stückweise glatt**, falls $I = [a, b]$ und falls es eine Zerlegung $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ von $[a, b]$ gibt mit $\gamma \in C_1[t_{\nu-1}, t_\nu] \forall \nu = 1, \dots, k, i = 1, \dots, n$. In diesem Falle nennen wir

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \left(= \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dots + \dot{\gamma}_n^2} dt \right) \text{ die } \mathbf{Bogenl\ddot{a}nge} \text{ von } \gamma.$$

Bemerkungen und Beispiele:

(i) Wir benutzen für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ die **Euklidische Norm**

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

(ii) $\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$: interpretierbar als Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $[t, t+h]$, geometrisch: Sekantenlage $\Rightarrow \dot{\gamma}(t)$ ist interpretierbar als Momentangeschwindigkeit mit Tangentiallage.

Ist $Z : a = t_0 < \dots < t_k = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so ist

$$\sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \text{ die L\ddot{a}nge des Polygonzuges zwischen den Punk-$$

$$\text{ten } \gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_k). \Rightarrow \mathcal{L}(\gamma) \approx \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| =$$

$$\sum_{i=1}^k \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1}) \rightarrow \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

(iii) Beispiel: Kreis: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow \mathcal{L}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \right\| dt =$
 $\int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$

(iv) explizite Kurve: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$, $a \leq t \leq b \Rightarrow \mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt$.

C: Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Definition:

Gegeben sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Für $c \in \mathbb{R}$ heißt $N_c := \{x \in M : f(x) = c\}$ die **Niveaumenge** von f zum **Niveau** c ;

(ii) $G(f) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} : x \in M \right\}$ heißt der **Graph** von f ;

(iii) Für festes $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ heißt die reelle Funktion

$f_i \rightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ die **i-te partielle Funktion** von f bei a . (Dabei sei der Definitionsbereich von f_i so gewählt, dass $(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \in M$ gilt für alle $x \in D$.)

Ist allgemeiner $v \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor der Länge 1, i.e. $\|v\| = 1$, so nennen wir $f_v : t \rightarrow f(a + tv)$ (t so, dass $a + tv \in M$ gilt) die **Richtungsfunktion** von f bei a in Richtung v .

Bemerkungen:

(i) Im Falle $n = 2$ ist der Graph von f eine explizite Fläche im \mathbb{R}^3 . Die Niveaumengen N_c sind als Höhenlinien interpretierbar. Es handelt sich dabei um implizit gegebene Kurven. Die Analyse von N_c und/oder den partiellen Funktionen erlaubt oftmals eine geometrische Interpretation.

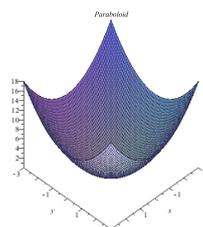
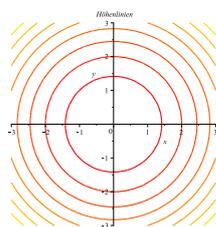
(ii) Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$; $N_c = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = c \right\} = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } c < 0 \\ \text{Ursprungskreis mit Radius } \sqrt{c} & \text{falls } c \geq 0 \end{cases}$

partielle Funktionen, von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus: $f_1(x) = f(x, 0) = x^2$ und

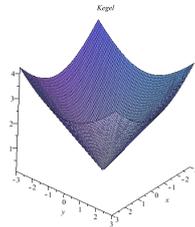
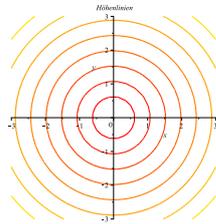
$f_2(y) = f(0, y) = y^2$: Parabeln; Richtungsfunktion von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus

in Richtung Nordost, also $v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$: $f_v(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2 = t^2$,

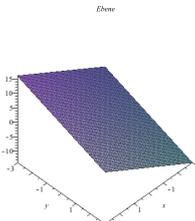
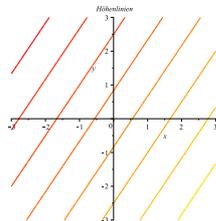
ebenfalls parabolisch. $G(f)$ hat die Form eines Rotationsparaboloids.



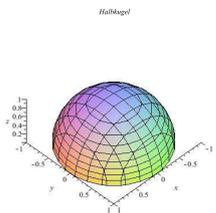
- (iii) Beispiel: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$: $N_c = \emptyset$, falls $c < 0$ bzw. ein Ursprungskreis mit Radius c im Falle $c \geq 0$. partielle Funktionen bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $f_1(x) = f(x, 0) = |x|$; $f_2(y) = |y|$: $G(f)$: Kegel



- (iv) Beispiel: $f(x, y) = 3x - 2y + 1$: N_c : Geraden mit Steigung $\frac{3}{2}$; $G(f)$: Ebene im \mathbb{R}^3



- (v) Beispiel: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$: N_c : Kreis ($0 \leq c \leq 1$); $f(x, 0) = \sqrt{1 - x^2}$; $f(0, y) = \sqrt{1 - y^2}$: Halbkreise; $G(f)$: obere Hälfte der Einheitskugel.



- (vi) Für $n \geq 3$ versagt unsere Anschauung. Lediglich für $n = 3$ besitzen die Niveaumengen N_c noch Interpretationsmöglichkeit als Höhenflächen (implizit gegebene Flächen im \mathbb{R}^3), z.B. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$: N_c : Kugeln um 0.

D: Funktionen $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

- Lineare Abbildungen: $T : x \rightarrow Ax$, A gegebene (n, n) -Matrix (vgl. Lineare Algebra), z.B. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: Drehung um $\frac{\pi}{2}$; $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$: Drehung um φ , $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: Spiegelung

an der $x - y$ -Ebene.

Matrixmultiplikation entspricht der Komposition; T ist bijektiv $\iff A$ ist regulär mit $T^{-1} : x \rightarrow A^{-1}x$; $|\det A| =$ Flächen- bzw. Volumenverhältnis von Bildfiguren zu Originalfiguren.

- Nichtlineare Abbildungen $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, z.B.

(i) $T : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ (Polarkoordinaten) bijektiv zwischen $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3 : T : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \cos \vartheta \\ z &= r \sin \vartheta \end{aligned}$$

(r : Abstand vom Ursprung; φ : Längengrad, ϑ : Breitengrad)
: bijektiv zwischen $(0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und

$$\mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Fazit: Solche Abbildungen T sind meist Koordinatentransformationen.

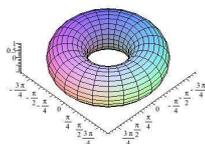
E: Funktionen $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

können wir auffassen als (parametrisierte) Flächen im \mathbb{R}^3 , z.B.

- $F(s, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$: Ebene durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $F(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$: $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$: Oberfläche der Einheitskugel

- $F(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} (2 + \cos \psi) \cos \varphi \\ (2 + \cos \psi) \sin \varphi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$, $-\pi \leq \varphi, \psi \leq \pi$: Torus



- $F(s, t) = \begin{pmatrix} (2 + s \cos t) \cos 2t \\ (2 + s \cos t) \sin 2t \\ s \sin t \end{pmatrix}, 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi : \text{Möbiusband}$
- $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}, f : M \rightarrow \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}^2 : \text{explizite Fläche}$