Universität Ulm
Wiederholungsblatt

Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 12/13

Lösungen zu Analysis II für Informatiker und Ingenieure

1. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\iiint_M f\,\mathrm{d}(x,y,z)$ in den folgenden Fällen.

(a) $M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ y,z \ge 0 \right\}$ und $f(x,y,z) := y \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(b) $M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x,y,z \ge 0,\ 0 \le x+y+z \le 1 \right\}$ und $f(x,y,z) := xyz$.

Lösung:

(a) Nach Substitution mit Kugelkoordinaten erhält man

$$\iiint_{[1,2]\times[0,\pi]\times[0,\pi/2]} r^4 \sin\varphi \cos^2\vartheta \,\mathrm{d}(r,\varphi,\vartheta) = \frac{31\pi}{10}.$$

(b) Iteriertes Integrieren mit Hilfe des Satzes von Fubini ergibt

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{720}.$$

2. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen Gradientenfelder auf $\mathbb{R}^2$ sind und bestimmen Sie ggf. eine Stammfunktion. Berechnen Sie außerdem den Wert des Kurvenintegrals $\int_\gamma f$ für die jeweils angegebene Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

(a) $f(x,y) := (y^2\cos(xy^2)+e^x, 2xy\cos(xy^2)+1/(1+y^2))$ und $\gamma(t) := (\pi t e^{1-t^2}, \sin(t\pi/2))^T$.

(b) $f(x,y) := (y, xy)$ und $\gamma(t) := (\sin(t\pi/2), t)^T$.

Lösung:

(a) f ist ein Gradientenfeld mit Stammfunktion $F(x,y) = \sin(xy^2) + e^x + \arctan(y)$. Somit gilt

$$\int_\gamma f = F(\pi,1) - F(0,0) = e + \frac{\pi}{4} - 1.$$

(b) f ist kein Gradientenfeld, denn

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 1 \ne y = \frac{\partial xy}{\partial x}.$$

Die Berechnung des Integrals ergibt

$$\int_\gamma f = \int_0^1 \frac{t\pi}{2}\cos\left(\frac{t\pi}{2}\right) + t\sin\left(\frac{t\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}.$$

3. Berechnen Sie die Oberfläche der durch

$$\mathscr{F} := \left\{ \begin{pmatrix} r^2 \\ \frac{1-r^2}{2} \sin\varphi \\ \frac{1-r^2}{2} \cos\varphi \end{pmatrix} : -1 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}$$

beschriebenen Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Man erhält als Normalenvektor

$$F_r \times F_\varphi = \begin{pmatrix} r \cdot \frac{1-r^2}{2} \\ r \cdot (1-r^2) \\ r \cdot (1-r^2) \end{pmatrix}$$

und somit für die Oberfläche

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot |r| \cdot (1-r^2)\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{5}\pi}{2}.$$

4. Lösen Sie das folgende System gewöhnlicher Differenzialgleichungen zum Anfangswert $x(0) = y(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 2 \end{aligned}$$

Lösung: Man erhält z.B. für x die Laplacetransformierte

$$\hat{x}(s) = \frac{-2}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}$$

und also $x(t) = e^t + e^{-t} - 2$. Deshalb ist $y(t) = e^t - e^{-t}$.