2. Klausur zur Analysis aus dem Sommersemester 2013

Mit kleinen Anpassungen an die Vorlesung im Wintersemester 2013/14

Zeit: 120 min
Hilfsmittel: Ein DinA4 Blatt mit handgeschriebenen Aufzeichnungen. Beachte: Kein Taschenrechner.

1. Berechne, falls existent, folgende bestimmte Integrale:

   (a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arctan(2x)dx$.

   (b) $\int_0^1 \frac{2x^2+x+5}{x^3+x^2+2x+2}dx$

   (5+8=13 Punkte)

2. Bestimmte für folgende Punktmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ jeweils das Innere $\overset{\circ}{M}$, die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ und den Rand ∂M . Entscheide, ob M offen, abgeschlossen, kompakt oder zusammenhängend ist [ohne Beweis].

   (a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1 \leq x^2+y^2+z^4 \leq 2 \right\}$.

   (b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in [-1,1] \right\}$.

   (c) $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$.

   (5+5+5=15 Punkte)

3. Berechne alle kritischen Stellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^3$ und entscheide, ob es sich um lokale Extrema oder Sattelpunkte handelt.

   (14 Punkte)

4. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, $f : M \to \mathbb{R}$ stetig auf M , und es seien $a, b \in M$ mit $f(a) < 0 < f(b)$. Zeige: Es gibt ein $\xi \in M$ mit $f(\xi) = 0$.

   (12 Punkte)

5. Betrachte die implizit gegebene Kurve $e^{xy} + \sin(x+y) = 1$. Zeige, dass der Punkt $\binom{0}{0}$ auf dieser Kurve liegt. Untersuche, ob lokale Auflösung $y(x)$ um diesen Punkt nach y möglich ist, und berechne gegebenfalls $y'(0)$.

   (12 Punkte)

6. Berechne, falls existent, $f'(x)$ für die Funktion

   $$f(x) := \int_1^x \frac{e^{xt}}{t}dt \qquad \text{für } x > 0.$$

   (10 Punkte)

7. Berechne das Volumen $|M|$ und $\int_M f$ für

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1 \leq x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4 \right\} \quad \text{und} \quad f(x,y,z) = z^2.$$

(6+8=14 Punkte)

8. Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.
Die Punkte für diese Aufgabe werden wie folgt vergeben:

richtig angekreuzt	1	Punkt
nicht angekreuzt	0	Punkte
falsch angekreuzt	-1	Punkt

Bei negativem Punktesaldo werden für diese Aufgabe 0 Punkte vergeben.

(1) Jede Riemann-integrierbare Funktion ist beschränkt.

(2) Eine Funktion ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn ihr Darbouxsches Oberintegral und Unterintegral übereinstimmen.

(3) Eine Teilmenge der reellen Zahlen ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.

(4) Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend.

(5) Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.

(6) Jede stetige Funktion bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

(7) Jede beschränkte, reellwertige Funktion auf einer kompakten Menge besitzt dort ein Minimum und Maximum.

(8) Eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-meßbar, wenn ihr Rand eine Lebesguesche Nullmenge ist.

(9) Jede Lebesguesche Nullmenge ist abgeschlossen.

(10) Die Vereinigung beliebig vieler offener Menge ist offen.

(10 Punkte)