Übungen zur Analysis 2

Blatt 10

43. Berechne alle partiellen Ableitungen und die Hesse-Matrix der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := e^{x \sin y} + z^2 x$. (3)

44. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := xy - x^2y^2$ und $a = (1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$. (2+2)

(a) Berechne die Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung Südost auf zwei Arten: Zunächst mit Hilfe der Definition der Richtungsableitung und anschließend mit Hilfe des Gradienten von f (Satz 114).

(b) In welche Richtung ist die Ableitung im Punkt a am größten? Wie groß ist sie in dieser Richtung?

45. Entscheide, ob folgende Funktionen total differenzierbar sind und bestimme ggf. ihren Gradienten. (4+3)

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := x^T Ax.$$

46. Existiert eine differenzierbare Funktion (3+3)

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f'(x, y, z) = (2xy + z, 2xy + e^z, xe^z + y^2)$?

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f'(x, y) = \left(e^x + \frac{y^2}{2}, xy\right)$?

47. Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen. (4)

(a) Sind A und B zusammenhängend, so auch $A \cap B$.

(b) Sind A und B konvex, so auch $A \cap B$.

(c) Sind A und B zusammenhängend und $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ zusammenhängend.

(d) Sind A und B konvex und $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ konvex.