Übungen zur Analysis 2

Blatt 11

48. Es sei $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch (3+3)

$$\Psi(r,\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(a) Bestimme $\Psi'(r,\varphi,\vartheta)$ und $\det \Psi'(r,\varphi,\vartheta)$.

(b) Für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei $g(r,\varphi,\vartheta) := f(\Psi(r,\varphi,\vartheta))$. Wie rechnen sich $\nabla g(r,\varphi,\vartheta)$ und $(\nabla f)(\Psi(r,\varphi,\vartheta))$ in einander um?

49. (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(x) := \exp(x^T Ax)$. Berechne $f''(x)$. (4)

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch (3)

$$f(x,y) := \int_{\Psi(x)}^{\Phi(y)} h(t)\,\mathrm{d}t$$

für eine stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und differenzierbare Funktionen $\Psi, \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bestimme $f'(x,y)$.

50. Für eine Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ betrachten wir die Norm (3+3)

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2}.$$

(a) Zeige, dass $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$

(b) Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit

$$c := \sup_{x\in\gamma([0,1])} \|f'(x)\| < \infty.$$

Zeige, dass $f \circ \gamma$ eine rektifizierbare Kurve ist mit $\mathcal{L}(f\circ\gamma) \le c \cdot \mathcal{L}(\gamma)$.

51. Bestimme das dritte Taylorpolynom der durch $f(x,y) := \cos(e^x y)$ gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 = (0,0)^T$. (4)

Frohe Weihnachten und alles Gute für 2014!