Übungen zur Analysis 2 — Blatt 14

60. Es sei $M := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) := x + 2y - 3z$.

(a) Entscheide, ob die Funktion f ihr Maximum und Minimum annimmt. (1)

(b) Berechne alle lokalen Extremstellen von f in M (4)

(c) Bestimme, falls existent, $\max_M f$ und $\min_M f$. (1)

61. Berechne den minimalen Abstand der Parabel $y = x^2$ zu der Geraden $y = x - 1$. (6)

62. Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar derart, dass sich die impliziten Kurven (6)

$$N_f := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\} \text{ und } N_g := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$$

jeweils durch eine glatte parametrisierte Kurven beschreiben lassen und setzen voraus, dass der minimale Abstand dieser beiden Kurven

$$m := \min\left\{ \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\| : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in N_f,\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in N_g \right\}$$

existiert. Zeige, dass für $(x,y)^T \in N_f$ und $(u,v)^T \in N_g$ der Verbindungsvektor $w := (x,y)^T - (u,v)^T$ senkrecht auf beiden Kurven steht, falls $m = \|w\|$.

63. Berechne den Wert folgender Integrale. (6)

(a) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[2,3]} y e^{xy} \,\mathrm{d}(x,y)$.

(b) $\displaystyle\iint_{[-3,10]\times[-\pi,\pi]} e^{x^2} \sin y \,\mathrm{d}(x,y)$.

(c) $\displaystyle\iint_M \frac{20x^3}{1+y^5} \,\mathrm{d}(x,y)$ für $M := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\}$.