UNIVERSITÄT ULM

Dr. G. Baur
M. Gerlach

Abgabe:
Bis 28.10.13, 12:30 Uhr
Briefkasten vor H3

Wintersemester 13/14

24 Punkte

Übungen zur Analysis 2

Blatt 2

5. Untersuche die durch (4)

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit.

6. Bestimme für alle $n \in \mathbb{N}_0$ jeweils das n-te Taylorpolynom T_n um den Entwicklungspunkt a der folgenden Funktionen. (6)

(a) $f(x) = \cos x$, $a = 0$

(b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $a = 0$

(c) $f(x) = \log x$, $a = 1$

7. Benutze den Satz von Taylor, um den Wert $\cos(1/2)$ bis auf einen Fehler von höchstens 10^{-4} zu berechnen. (4)

8. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass (5)

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Zeige weiter, dass

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0, 1]$.

Was bedeuten diese Ungleichungen geometrisch?

9. Es seien Z und Z' zwei Zerlegungen (5)

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \text{und} \quad a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b$$

des Intervalls $[a, b]$. Die Zerlegung Z' heißt *Verfeinerung* von Z, falls

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}.$$

Zeige, dass für jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stets $O(Z'; f) \leq O(Z; f)$.

Bemerkung: Analog zeigt man, dass $U(Z'; f) \geq U(Z; f)$.